



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2021-A04

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Σε μια κανονική 8×8 σκακιέρα, με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε τέσσερα μαύρα τετραγωνάκια και τέσσερα άσπρα τετραγωνάκια ώστε να μην υπάρχουν δύο από αυτά τα τετραγωνάκια που να βρίσκονται στην ίδια σειρά ή στην ίδια στήλη;

Πηγή: Τουρνουά Harvard-MIT 2020

Προτεινόμενη Λύση

Ας αριθμήσουμε τις σειρές από το 1 ως το 8 και ας κάνουμε το ίδιο και στις στήλες. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το τετραγωνάκι $(1, 1)$ είναι μαύρο. (Με το συμβολισμό (i, j) εννοούμε το τετραγωνάκι στη στήλη i και τη σειρά j .)

Χωρίζουμε τη σκακιέρα στα εξής σύνολα:

$$A = \{(i, j) : i \equiv 0 \pmod{2}, j \equiv 0 \pmod{2}\}$$

$$B = \{(i, j) : i \equiv 0 \pmod{2}, j \equiv 1 \pmod{2}\}$$

$$C = \{(i, j) : i \equiv 1 \pmod{2}, j \equiv 0 \pmod{2}\}$$

$$D = \{(i, j) : i \equiv 1 \pmod{2}, j \equiv 1 \pmod{2}\}$$

Παρατηρούμε ότι όλα τα τετραγωνάκια στα A, D είναι μαύρα και όλα τα τετραγωνάκια στα B, C είναι άσπρα.

Έστω ότι επιλέξαμε a, b, c, d τετραγωνάκια από τα σύνολα A, B, C, D αντίστοιχα.

Τα σύνολα A, B περιέχουν όλα τα κελιά των άρτιων στηλών οπότε $a + b = 4$. Ομοίως $a + c = b + d = c + d = 4$. Επίσης τα σύνολα A, D περιέχουν όλα τα άσπρα τετραγωνάκια. Οπότε $a + d = 4$ και ομοίως $b + c = 4$.

Από το πιο πάνω παίρνουμε εύκολα $a = b = c = d = 2$.

Έχουμε $16 \cdot 9/2 = 72$ τρόπους να επιλέξουμε τα δύο τετραγωνάκια του συνόλου A . (Έχουμε 16 επιλογές για το πρώτο τετραγωνάκι. Το δεύτερο πρέπει να είναι σε διαφο-

ρετική σειρά και στήλη οπότε έχουμε 9 επιλογές. Διαιρούμε όμως με το 2 διότι η σειρά επιλογής δεν παίζει ρόλο.)

Η επιλογή στο σύνολο D είναι εντελώς ανεξάρτητη από αυτή του A οπότε έχουμε 72 επιλογές.

Τώρα για το B , μας έχουν μείνει δύο σειρές και δύο στήλες αφού η επιλογή του A ακυρώνει δύο στήλες του B και το D ακυρώνει δύο σειρές του B . Με παρόμοια λογική όπως πιο πάνω έχουμε $4 \cdot 1/2 = 2$ επιλογές για τα τετραγωνάκια του B . Ομοίως έχουμε δύο επιλογές για τα τετραγωνάκια του C .

Συνολικά υπάρχουν $72^2 \cdot 2^2 = 20736$ διαφορετικούς τρόπους.

