



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2021-A11

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

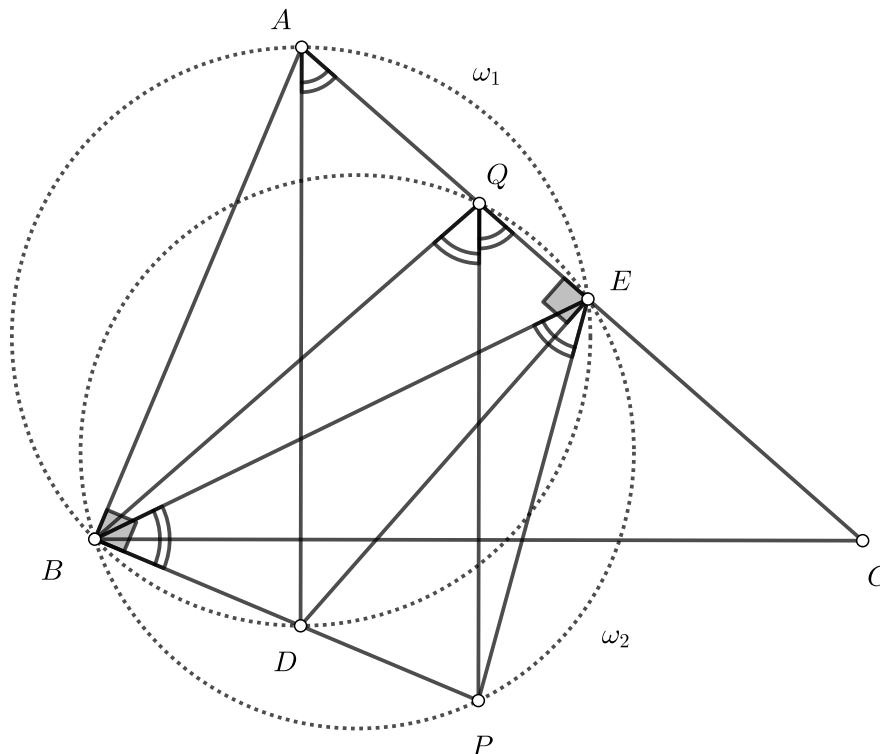
Πρόβλημα

Έστω τρίγωνο ABC και έστω ευθεία ℓ η οποία περνά από το σημείο B και είναι κάθετη στην AB . Έστω ότι η κάθετη από το A στην AB τέμνει την ℓ στο σημείο D και έστω ότι η μεσοκάθετος της BC τέμνει την ℓ στο P . Έστω E το ίχνος της καθέτου από το σημείο D στην AC .

Να δείξετε ότι το τρίγωνο BPE είναι ισοσκελές.

Πηγή: Ηνωμένο Βασίλειο 2019

Προτεινόμενη Λύση



Επειδή $\angle DBA = \angle DEA = 90^\circ$, τα σημεία A, B, D, E είναι ομοκυκλικά σε κύκλο ω_1 διαμέτρου AD .

Τότε $\angle DBE = \angle DBA = 90^\circ - \gamma$, όπου $\gamma = \angle ACB$.

Έστω Q το σημείο τομής της μεσοκαθέτου της BC με την AC . Τότε έχουμε και $\angle PQE = 90^\circ - \gamma = \angle PBE$ άρα τα σημεία P, B, Q, E είναι ομοκυκλικά σε κύκλο ω_2 . Τότε

$$\angle BEP = \angle BQP = \angle CQP = 90^\circ - \gamma = \angle PBE$$

Εδώ, η πρώτη ισότητα ισχύει από την ομοκυκλικότητα των P, B, Q, E και η δεύτερη επειδή η QP είναι μεσοκάθετη της BC .

Άρα το τρίγωνο BPE είναι όντως ισοσκελές.

