



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2021-A12

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Σε έναν κύκλο βρίσκονται 2018 σημεία και σε κάθε ένα από αυτά τα σημεία βάζουμε έναν ακέραιο αριθμό. Κάθε αριθμός είναι μεγαλύτερος από το άθροισμα των δύο προηγούμενων αριθμών με ωρολογιακή φορά.

Να βρείτε το μέγιστο πλήθος θετικών ακεραίων που μπορούν να υπάρξουν σε μια τέτοια διάταξη.

Πηγή: Αυστρία 2018

Προτεινόμενη Λύση

Έστω $x_1, x_2, \dots, x_{2018}$ οι αριθμοί με αυτήν την ωρολογιακή φορά.

Δεν γίνεται να υπάρχουν δύο συνεχόμενοι θετικοί αριθμοί. Αν χωρίς βλάβη της γενικότητας $x_1, x_2 > 0$, τότε $x_3 > x_1 + x_2 > x_2 > 0$, $x_4 > x_3 + x_2 > x_3 > 0$ κ.ο.κ. Παίρνουμε λοιπόν $x_2 < x_3 < x_4 < \dots < x_{2018} < x_1 < x_2$, άτοπο.

Άρα έχουμε το πολύ $2018/2 = 1009$ αριθμούς. Σε αυτήν την περίπτωση θα έπρεπε οι αριθμοί να είναι εναλλάξ θετικοί και μη θετικοί. Έστω χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $x_1, x_3, \dots$ θετικοί και $x_2, x_4, \dots$ μη θετικοί. Τότε $x_4 > x_2 + x_3 > x_2$, $x_6 > x_4 + x_5 > x_4$ κ.ο.κ. Παίρνουμε λοιπόν $x_2 < x_4 < x_6 < \dots < x_{2018} < x_2$ που είναι πάλι άτοπο.

Άρα έχουμε το πολύ 1008 θετικούς αριθμούς. Μπορούμε όντως να έχουμε 1008 θετικούς αριθμούς ως εξής: Έστω N ένας αρκετά μεγάλος θετικός ακέραιος τον οποίο θα επιλέξουμε αργότερα. Έστω επίσης a, b δύο (αρνητικοί) ακέραιοι. Θεωρούμε τη διάταξη:

$$1, -N, 1, -N + 2, 1, -N + 4, \dots, 1, -N + 2014, a, b$$

Αυτή η διάταξη μας κάνει αρκεί να ικανοποιούνται οι εξής ανισότητες: $a > 2015 - N$, $b > a + 2014 - N$, $1 > a + b$ και $-N > 1 + b$. (Οι υπόλοιπες 2014 ανισότητες που θέλουμε είναι άμεσο ότι ικανοποιούνται.) Η τρίτη από αυτές ικανοποιείται αν διαλέξουμε a, b αρνητικούς. Επιλέγοντας $b = -N - 2$ ικανοποιείται η τελευταία από αυτές. Επιλέγοντας $a = -2017$ ικανοποιείται και η δεύτερη από αυτές. Επιλέγοντας $N = 4033$ ικανοποιείται

και η πρώτη από αυτές. Άρα έχουμε τη ζητούμενη διάταξη. Είναι η

$$1, -4033, 1, -4031, 1, -4029, \dots, 1, -2019, -2017, -4035$$

