



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2021-A14

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Να βρεθούν όλα τα ζεύγη πρώτων αριθμών (p, q) για τα οποία ο αριθμός $p^{q-1} + q^{p-1}$ είναι τέλειο τετράγωνο.

Πηγή: Διαγωνισμός Simon Marais 2017

Προτεινόμενη Λύση

Αν οι p, q είναι και οι δύο περιττοί, τότε οι $p-1, q-1$ είναι και οι δύο άρτιοι οπότε $p^{q-1} \equiv q^{p-1} \equiv 1 \pmod{4}$ αφού περιττός αριθμός σε άρτια δύναμη είναι πάντα ισότιμο με $1 \pmod{4}$.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας $p = 2$. Θα δείξουμε ότι $q = 2$ επίσης. Έστω λοιπόν προς άτοπο ότι $q = 2k + 1$ περιττός. Τότε ο $A = p^{q-1} + q^{p-1} = 2^{2k} + (2k + 1)$ είναι τέλειο τετράγωνο. Επειδή $A > 2^{2k} = (2^k)^2$, τότε $A \geq (2^k + 1)^2 = 2^{2k} + 2 \cdot 2^k + 1$. Παίρνουμε λοιπόν $k \geq 2^k$ το οποίο είναι άτοπο. (Από την ανισότητα Bernoulli έχουμε $2^k = (1 + 1)^k \geq 1 + k$ για κάθε φυσικό k .)

Άρα το μόνο ζεύγος που ικανοποιεί το ζητούμενο είναι το $(2, 2)$.

Εναλλακτικά, αν $p = 2, q = 2k + 1$ και $A = m^2$ παίρνουμε την εξίσωση

$$q = A - 2^{2k} = (m - 2^k)(m + 2^k)$$

Επειδή ο q είναι πρώτος, πρέπει $m + 2^k = q, m - 2^k = 1$ που δίνει $m = (q + 1)/2$ και $2^k = (q - 1)/2 = k$. Οπότε πάλι καταλήγουμε σε άτοπο.