



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2021-B01

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Να βρεθούν όλες οι τριάδες (a, b, c) θετικών ακεραιών, ώστε

$$a^3 + b^3 + c^3 = (abc)^2$$

Πηγή: IMO Shortlist 2019

Προτεινόμενη Λύση

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a \geq b \geq c$. Τότε

$$(abc)^2 = a^3 + b^3 + c^3 \leq 3a^3$$

που δίνει $3a \geq (bc)^2$. Τώρα παρατηρούμε ότι

$$2b^3 \geq b^3 + c^3 = a^2((bc)^2 - a) \geq a^2 \geq \frac{b^4 c^4}{9} \geq \frac{b^3 c^5}{9}$$

Άρα $c^5 \leq 18$ και επομένως $c = 1$. Από την ανισότητα $2b^3 \geq \frac{(bc)^4}{9}$ παίρνουμε τώρα $b \leq 18$. Μπορούμε τώρα να ελέγξουμε τις τιμές του b μία προς μία και να βρούμε τις αντίστοιχες τιμές του a . Θα βρούμε όμως μια καλύτερη ανισότητα για το b .

Όπως προηγουμένως έχουμε

$$a^2 b^2 = a^3 + b^3 + 1 \leq 2a^3 + 1$$

Άρα $2a \geq b^2 - \frac{1}{a^2}$ που δίνει

$$4a^2 \geq b^4 - \frac{2b^2}{a^2} + \frac{1}{a^4} \geq b^4 - 2$$

Έχουμε επίσης

$$b^3 + 1 = a^2(b^2 - a) \geq a^2 \geq \frac{b^4 - 2}{4}$$

Αυτό δίνει $b^4 \leq 4b^3 + 6$ οπότε πρέπει $b \leq 4$ αφού σε διαφορετική περίπτωση θα είχαμε

$$b^4 - 4b^3 = b^3(b - 4) \geq 5^3 > 6$$

Άρα $b \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Για $b = 1$ έχουμε $a^3 + 2 = a^2$ το οποίο δεν έχει θετικές ακέραιες λύσεις. (Πρέπει $a^2 | 2$, άρα $a = 1$ το οποίο απορρίπτεται.)

Για $b = 2$ έχουμε $a^3 + 9 = 4a^2$. Πρέπει $a^2 | 9$, άρα $a = 1$ ή $a = 3$. Το $a = 1$ απορρίπτεται ενώ το $a = 3$ είναι δεκτό.

Για $b = 3$ έχουμε $a^3 + 28 = 9a^2$. Πρέπει $a^2 | 28$, άρα $a = 1$ ή $a = 2$ τα οποία απορρίπτονται αφού $a \geq b$.

Για $b = 4$ έχουμε $a^3 + 65 = 16a^2$. Πρέπει $a^2 | 65$, άρα $a = 1$ το οποίο απορρίπτεται.

Άρα μοναδική λύση είναι η $(3, 2, 1)$ καθώς και οι μεταθέσεις της.

