



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2021-B02

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Σε μια τάξη με $2N$ μαθητές δόθηκε ένα διαγώνισμα. Οι πιθανές βαθμολογίες του διαγωνίσματος ήταν $0, 1, 2, \dots, 10$ και κάθε βαθμολογία εμφανίστηκε τουλάχιστον μία φορά. Επίσης, ο μέσος όρος των βαθμολογιών ήταν 7.4 .

Ναδειχθεί ότι οι μαθητές μπορούν να χωριστούν σε δύο ομάδες των N μαθητών η κάθε μία ώστε ο μέσος όρος των βαθμολογιών τους να είναι 7.4 .

Πηγή: Putnam 2017

Προτεινόμενη Λύση

Για ένα σύνολο μαθητών A γράφουμε $S(A)$ για το άθροισμα των βαθμών των μαθητών του συνόλου A . Για κάθε τρόπο που χωρίζουμε τους μαθητές σε δύο σύνολα A και B με N μαθητές το κάθε ένα κοιτάζουμε την τιμή του $|S(A) - S(B)|$ και παίρνουμε τον χωρισμό με την ελάχιστη δυνατή τιμή του $|S(A) - S(B)|$. Αρχεί να δείξουμε ότι σε αυτήν την περίπτωση έχουμε $S(A) = S(B)$. Ας υποθέσουμε ότι αυτό δεν ισχύει και ότι χωρίς βλάβη της γενικότητας είναι $S(A) > S(B)$. Έστω $k = S(A) - S(B)$. Παρατηρούμε ότι $S(A) + S(B) = 14.8N = \frac{74N}{5}$. Άρα πρέπει N πολλαπλάσιο του 5 και ο $S(A) + S(B)$ είναι άρτιος. Τότε και ο $k = S(A) - S(B) = S(A) + S(B) - 2S(B)$ είναι επίσης άρτιος, άρα $k \geq 2$. Έστω $a_1, \dots, a_N$ οι βαθμολογίες των μαθητών του συνόλου A και $b_1, \dots, b_N$ οι βαθμολογίες των μαθητών του συνόλου B . Γράφουμε αυτές τις βαθμολογίες σε φθίνουσα σειρά. Επιπλέον αν κάποιες από τις βαθμολογίες είναι ίσες, γράφουμε πρώτα αυτές του συνόλου B και ύστερα αυτές του συνόλου A . Π.χ. αν $a_1 = a_2 = 5, a_3 = 4$ και $b_1 = 5, b_2 = 3, b_3 = 2$ τότε θα τις γράψουμε με τη σειρά $b_1, a_1, a_2, a_3, b_2, b_3$ ή με τη σειρά $b_1, a_2, a_1, a_3, b_2, b_3$. Προσοχή στο ότι η b_1 θα γραφτεί πριν τις a_1, a_2 αλλά η σειρά που θα γραφτούν οι a_1, a_2 δεν μας ενδιαφέρει.

Επειδή $S(A) > S(B)$ τουλάχιστον ένα από τα a_i θα εμφανίζεται πριν από ένα από τα b_j . Κοιτάζουμε τις βαθμολογίες ενδιάμεσα των a_i και b_j σε κάποια φάση θα έχουμε δυο διαδοχικές βαθμολογίες, μια από το σύνολο A και μια από το σύνολο B . Έστω τις $a_{i'}$ και $b_{j'}$. Από τα πιο πάνω είναι $a_{i'} > b_{j'}$. Επίσης, επειδή από τα δεδομένα εμφανίζονται όλες οι πιθανές βαθμολογίες, πρέπει $a_{i'} = b_{j'} + 1$. Έστω a ο μαθητής με τη βαθμολογία

a_i και b ο μαθητής με τη βαθμολογία b_j . Ανταλλάσσοντας τους μαθητές a και b μεταξύ των δύο συνόλων παίρνουμε δυο καινούργια σύνολα A' και B' με $S(A') = S(A) - 1$ και $S(B') = S(B) - 1$. Τότε $|S(A') - S(B')| = k - 2 < k$, άτοπο.

Άρα η μικρότερη δυνατή τιμή του $|S(A) - S(B)|$ ήταν 0 όπως θέλαμε να δείξουμε.

Δεύτερη Λύση

Έστω $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{2N}$ οι βαθμολογίες των μαθητών. Κοιτάζουμε τα αθροίσματα

$$s_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_N$$

$$s_2 = x_2 + x_3 + \dots + x_{N+1}$$

$$\dots$$

$$s_{N+1} = x_{N+1} + \dots + x_{2N}$$

Έχουμε $s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_{N+1}$. Δεν μπορούμε να έχουμε $s_1 = s_{N+1}$ διότι τότε θα είχαμε και $s_1 = s_2 = \dots = s_{N+1}$ και όλες οι βαθμολογίες θα ήταν ίδιες. (Αν $s_1 = s_2$ τότε $x_1 = x_{N+1}$ οπότε $x_1 = x_2 = \dots = x_{N+1}$. Ομοίως από το $s_N = s_{N+1}$ παίρνουμε $x_N = \dots = x_{2N}$. Άρα όλες οι βαθμολογίες είναι ίδιες.)

Επειδή $s_1 + s_{N+1} = 7.4 \cdot 2N$ και $s_1 < s_{N+1}$ τότε $s_1 < 7.4N < s_{N+1}$. Έστω i μέγιστο ώστε $s_i < 7.4N \leq s_{i+1}$.

Έστω $s = x_i + s_{i+1} = s_i + x_{i+N}$. Κοιτάζουμε τα αθροίσματα

$$t_0 = s - x_{i+N} = s_i$$

$$t_1 = s - x_{i+N-1}$$

$$\dots t_N = s - x_i = s_{i+1}$$

Τότε έχουμε $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N$. Επίσης, για κάθε $0 \leq j \leq N - 1$ έχουμε

$$t_{j+1} - t_j = x_{i+N-j} - x_{i+N-(j+1)} \in \{0, 1\}$$

Επειδή $t_0 < 7.4N \leq t_N$, σε κάποια στιγμή θα βρούμε j με $t_j = 7.4N$. Οπότε το ζητούμενο έπεται. (Ας παρατηρήσουμε επίσης ότι όπως και στην πρώτη λύση το N είναι πολλαπλάσιο του 5 και άρα το $7.4N$ είναι ακέραιος.)