



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2021-B03

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Να βρεθούν όλα τα μονικά πολυώνυμα $P(x)$ ώστε το πολυώνυμο $P(x)^2 - 1$ να διαιρείται από το πολυώνυμο $P(x+1)$.

Πηγή: Σερβία 2020

Προτεινόμενη Λύση

Έστω $z_1, \dots, z_n$ οι μιγαδικές ρίζες του $P(x)$ με πολλαπλότητα. Επειδή το $P(x)$ είναι μονικό, τότε $P(x) = (x - z_1) \cdots (x - z_n)$.

Επειδή $P(x+1) | P(x)^2 - 1$ τότε έχουμε ότι $P(z_i - 1)^2 = 1$ για κάθε i . Άρα έχουμε και $|P(z_i - 1)| = 1$ και επομένως και

$$|z_i - z_1 - 1| \cdot |z_i - z_2 - 1| \cdots |z_i - z_n - 1| = 1 \quad (1)$$

για κάθε i .

Χωρίς βλάβη της γενικότητας είναι $\operatorname{Re}(z_1) \leq \operatorname{Re}(z_2) \leq \cdots \leq \operatorname{Re}(z_n)$. Τότε

$$-1 \geq \operatorname{Re}(z_1 - z_1 - 1) \geq \operatorname{Re}(z_1 - z_2 - 1) \geq \cdots \geq \operatorname{Re}(z_1 - z_n - 1)$$

Άρα έχουμε $|z_1 - z_j - 1| \geq 1$ για κάθε j . Παίρνουμε λοιπόν

$$|z_i - z_1 - 1| \cdot |z_i - z_2 - 1| \cdots |z_i - z_n - 1| \geq 1 \quad (2)$$

Από την (1) πρέπει να έχουμε ισότητα στη (2) και για να ισχύει αυτό πρέπει να έχουμε $|z_1 - z_j - 1| = 1$ για κάθε j . Επειδή επίσης $\operatorname{Re}(z_1 - z_j - 1) \geq -1$, για να έχουμε $|z_1 - z_j - 1| = 1$ πρέπει σίγουρα να έχουμε $\operatorname{Re}(z_j) = \operatorname{Re}(z_1)$. Αλλά τότε πάλι από το $|z_1 - z_j - 1| = 1$ παίρνουμε ότι $z_j = z_1$.

Δηλαδή όλες οι ρίζες του $P(x)$ είναι ίσες και άρα $P(x) = (x - a)^n$ για κάποιο a . Άρα $(x + 1 - a)^n | P(x)^2 - 1$.

Το $(x + 1 - a)$ δεν μπορεί να διαιρεί και το $P(x) - 1$ και το $P(x) + 1$ διότι τότε θα διαιρούσε και το $(P(x) + 1) - (P(x) - 1) = 2$, άτοπο εκτός και αν το $P(x)$ είναι σταθερό.

Αν $x+1-a \nmid P(x)-1$, τότε πρέπει $P(x+1) \mid P(x)+1$. Όμως τα $P(x+1), P(x)+1$ είναι μονικά πολυώνυμα βαθμού n , άρα πρέπει να έχουμε $P(x+1) = P(x)+1$. Ομοίως αν $x+1-a \nmid P(x)+1$ τότε πρέπει να έχουμε $P(x+1) = P(x)-1$.

Σε κάθε περίπτωση το πολυώνυμο $P(x+1) - P(x)$ είναι σταθερό. Για να ισχύει αυτό πρέπει το $P(x)$ να είναι το πολύ πρώτου βαθμού.

Αφού $P(x)$ μονικό και το πολύ πρώτου βαθμού, πρέπει $P(x) = 1$ ή $P(x) = x - a$ για κάποιο $a \in \mathbb{R}$. Είναι εύκολο να ελεγχθεί ότι όλα αυτά τα πολυώνυμα ικανοποιούν τις συνθήκες.

