



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2021-B05

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ για τις οποίες ισχύει ότι αν m, n θετικοί ακέραιοι τότε ο $f(n)$ διαιρεί τον $f(m) + n - m$.

Πηγή: Ολυμπιάδα Καυκάσου 2020

Προτεινόμενη Λύση

Θέτουμε $k = f(1) - 1$. Για $m = 1$ παίρνουμε $f(n) | n + k$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ιδιαίτερα, για κάθε πρώτο $p > k$ έχουμε $f(p - k) | p$ οπότε θα είναι $f(p - k) = 1$ ή $f(p - k) = p$.

Περίπτωση 1: Έστω ότι $f(p - k) = p$ για άπειρους πρώτους $p > k$. Για $n = p - k$, παίρνουμε $p | f(m) + p - k - m$ άρα και $p | f(m) - k - m$. Αυτό ισχύει για άπειρους πρώτους p και κάθε φυσικό m . Για κάθε φυσικό m επιλέγω πρώτο p ώστε $f(p - k) = p$ και $p > |f(m) - k - m|$. Τότε θα έχω $f(m) = k + m$.

Εύκολα ελέγχουμε ότι η $f(m) = m + k$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και κάποιο $k \in \mathbb{N}$ ικανοποιεί τη συνθήκη.

Περίπτωση 2: Αν δεν ισχύει ότι $f(p - k) = p$ για άπειρους πρώτους $p > k$ τότε θα έχουμε $f(p - k) = 1$ για κάθε αρκετά μεγάλο πρώτο p . Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε τέτοιο πρώτο p , παίρνοντας $m = p - k$, θα έχουμε $f(n) | n + 1 - p + k$. Δηλαδή για κάθε τέτοιο πρώτο p θα έχουμε $p \equiv (n + 1 + k) \pmod{f(n)}$. Ισχυριζόμαστε ότι $f(n) \in \{1, 2\}$. Πράγματι αν $f(n) > 2$, τότε $\varphi(f(n)) \geq 2$. Από το Θεώρημα Dirichlet για πρώτους σε αριθμητικές προόδους (δείτε τα σχόλια στη λύση του [OLY2018-A15](#)) υπάρχουν $\varphi(f(n)) \geq 2$ κλάσεις ισοδυναμίας modulo $f(n)$ που περιέχουν άπειρους πρώτους. Αυτό είναι άτοπο αφού δείξαμε ότι $p \equiv (n + 1 + k) \pmod{f(n)}$ για κάθε αρκετά μεγάλο πρώτο p .

Άρα πρέπει $f(n) \in \{1, 2\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Μια περίπτωση είναι να έχουμε $f(n) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η οποία είναι αποδεκτή. Έστω λοιπόν ότι υπάρχει ℓ ώστε $f(\ell) = 2$. Για $n = \ell$ παίρνουμε $2 | f(m) + \ell - m$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Τότε $f(m)$ είναι περιττός αν $\ell - m$ περιττός, και άρτιος αν $\ell - m$ είναι άρτιος. Άρα οι τιμές του $f(m)$ καθορίζονται πλήρως και έχουμε άλλες δύο περιπτώσεις. Την $f(n) = 1$ αν n περιττός και $f(n) = 2$

αν n άρτιος, καθώς και την $f(n) = 2$ αν n περιττός και $f(n) = 1$ αν n άρτιος. Και οι δύο αυτές περιπτώσεις ικανοποιούν τη συνθήκη.

