



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2021-B06

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

$2n$ μαθητές λαμβάνουν μέρος σε έναν διαγωνισμό μαθηματικών. Αρχικά, κάθε μαθητής δημιουργεί μια άσκηση την οποία αποστέλλει στην επιτροπή του διαγωνισμού. Ακολούθως, η επιτροπή στέλνει σε κάθε μαθητή από ένα από αυτά τα προβλήματα με κάθε μαθητή να λαμβάνει διαφορετικό πρόβλημα. Ονομάζουμε τον διαγωνισμό τίμιο αν υπάρχουν n μαθητές οι οποίοι τα προβλήματα που λαμβάνουν έχουν προταθεί από τους υπόλοιπους n μαθητές.

Ναδειχθεί ότι το πλήθος των τρόπων κατανομής των προβλημάτων ώστε ο διαγωνισμός να είναι τίμιος είναι τέλειο τετράγωνο.

Πηγή: Ουκρανία 2018

Προτεινόμενη Λύση

Παίρνουμε έναν μαθητή x_1 και τον βάζουμε να καθίσει σε ένα κυκλικό τραπέζι. Βρίσκουμε τον μαθητή x_2 που έλαβε το πρόβλημα του x_1 και τον βάζουμε να καθίσει στα δεξιά του x_1 . Μετά βρίσκουμε τον μαθητή x_3 που έλαβε το πρόβλημα του x_2 και τον βάζουμε να καθίσει δεξιά του x_2 κ.ο.κ. Σε κάποια φάση θα καθίσει στο τραπέζι ένας μαθητής x_k ο οποίος στέλνει το πρόβλημά του στον μαθητή x_1 . Όταν γίνει αυτό συνεχίσουμε τη διαδικασία σε άλλο τραπέζι κ.ο.κ.

Ισχυριζόμαστε ότι αν ο διαγωνισμός είναι τίμιος τότε σε κάθε τραπέζι έχουμε άρτιο πλήθος από μαθητές. Πράγματι έστω A το σύνολο των n μαθητών που λαμβάνουν προβλήματα από τους υπόλοιπους n μαθητές. Έστω B το σύνολο των υπόλοιπων n μαθητών. Τότε και κάθε μαθητής του B λαμβάνει το πρόβλημά του από μαθητή του συνόλου A . Άρα σε κάθε τραπέζι έχουμε εναλλάξ άτομα των συνόλων A και B οπότε κάθε τραπέζι έχουμε άρτιο πλήθος μαθητών.

Αντιστρόφως αν καθίσουμε τους μαθητές σε τραπέζια ώστε σε κάθε τραπέζι να έχουμε άρτιο πλήθος μαθητών και μετά κάθε μαθητής δώσει το πρόβλημά του σε αυτόν που κάθεται στα δεξιά του θα έχουμε έναν τίμιο διαγωνισμό. Πράγματι αν βάλουμε κυκλικά διαδοχικούς αριθμούς στους μαθητές σε κάθε τραπέζι τότε έχουμε βάλει n περιττούς

και n άρτιους αριθμούς και κάθε μαθητής με περιττό αριθμό παίρνει πρόβλημα από μαθητή με άρτιο αριθμό.

Αρκεί λοιπόν να μετρήσουμε με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε $2n$ μαθητές σε κυκλικά τραπέζια ώστε σε κάθε τραπέζι να κάθεται άρτιο πλήθος από μαθητές.

Επιλέγουμε αυθαίρετα τον πρώτο μαθητή x_1 που θα καθίσει στο πρώτο τραπέζι. Έχουμε $2n - 1$ επιλογές για τον x_2 που θα καθίσει στα δεξιά του. Έχουμε $2n - 1$ επιλογές για το ποιος θα καθίσει στα δεξιά του επειδή αυτός επιτρέπεται να είναι ο x_1 . Αν είναι διαφορετικός από τον x_1 τον ονομάζουμε x_3 αλλιώς το τραπέζι κλείνει και επιλέγουμε αυθαίρετα τον x_3 να καθίσει σε ένα άλλο τραπέζι. Στο τραπέζι που κάθεται ο x_3 έχουμε περιττό πλήθος μαθητών. Άρα θα στείλει το πρόβλημά του σε διαφορετικό μαθητή από τους x_1, x_2, x_3 . Έχουμε $2n - 3$ επιλογές και ονομάζουμε τον μαθητή που θα πάρει το πρόβλημα x_4 . Ο x_4 έχει επίσης $2n - 3$ επιλογές αφού εκτός από τους υπόλοιπους $2n - 4$ μαθητές μπορεί να στείλει το πρόβλημά του και στο πρώτο άτομο που κάθισε στο τραπέζι του.

Γενικά έστω ότι έχουμε επιλέξει τους μαθητές $x_1, \dots, x_{2k}$ με τον πιο πάνω τρόπο. Στο τραπέζι του x_{2k} κάθεται άρτιο πλήθος ατόμων. Επομένως έχουμε $2n - 2k + 1$ επιλογές για το που θα πάει το πρόβλημά του. Είτε σε έναν από τους υπόλοιπους $2n - 2k$ μαθητές, είτε σε αυτόν που κάθισε πρώτος στο τραπέζι του. Στην πρώτη περίπτωση ονομάζουμε τον καινούργιο μαθητή x_{2k+1} . Στη δεύτερη περίπτωση κλείνουμε το τραπέζι και επιλέγουμε αυθαίρετα ένα καινούργιο μαθητή που τον βάζουμε σε νέο τραπέζι και τον ονομάζουμε x_{2k+1} . Ο x_{2k+1} θα κάθεται σε τραπέζι με περιττό πλήθος ατόμων και θα πρέπει να στείλει το πρόβλημά του σε καινούργιο μαθητή. Έχουμε $2n - 2k - 1$ επιλογές για αυτό.

Αν γράψουμε a_m για το πλήθος των επιλογών που έχουμε για το που θα στείλει το πρόβλημά του ο x_m είδαμε ότι $a_{2k} = 2n - 2k + 1$ και $a_{2k+1} = 2n - 2k - 1$. Άρα έχουμε συνολικά

$$\prod_{m=1}^{2n} a_m = \prod_{k=1}^n a_{2k} \prod_{k=0}^{n-1} a_{2k+1} = \prod_{k=1}^n (2n - 2k + 1) \prod_{k=0}^{n-1} (2n - 2k - 1) = \left(\prod_{k=1}^n (2n - 2k + 1) \right)^2$$

κατανομές ώστε ο διαγωνισμός να είναι τίμιος.