



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2021-B08

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

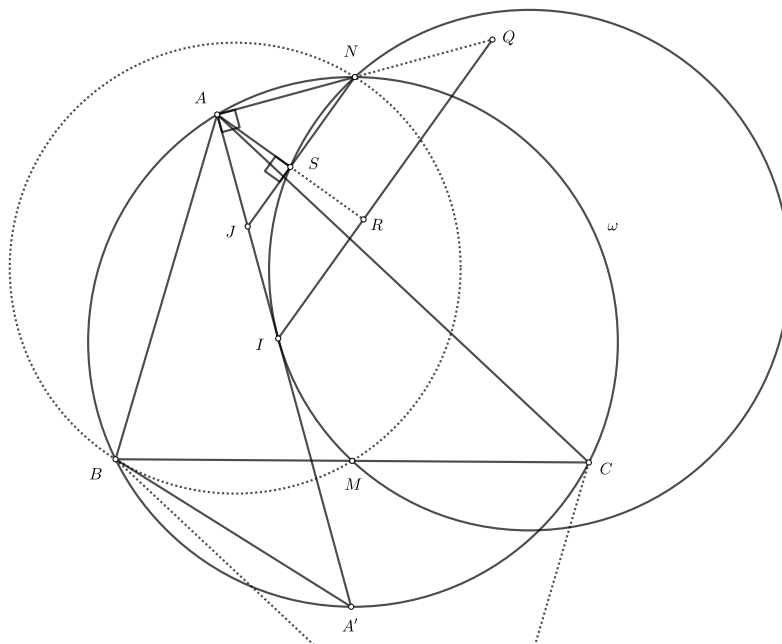
Πρόβλημα

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABC . Έστω I το έγκεντρο του τριγώνου ABC και έστω N το μέσο του τόξου $\widehat{BAC}$ του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC . Έστω σημείο P τέτοιο ώστε το $ABPC$ να είναι παραλληλόγραμμο. Έστω Q το συμμετρικό σημείο του A ως προς το σημείο N και έστω R η προβολή του A στην ευθεία QI .

Ναδειχθεί ότι η ευθεία AI είναι εφαπτόμενη στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου PQR .

Πηγή: Γεωμετρική Ολυμπιάδα Ιράν 2020

Προτεινόμενη Λύση



Θεωρούμε την ομοιοθεσία με κέντρο το A και λόγο $1/2$. (Δείτε και τα σχόλια στη λύση του [OLY2017-B24](#).) Το σημείο Q πάει στο N . Το σημείο P πάει στο μέσο M της BC .

Το σημείο I πάει στο μέσο J της AI . Το σημείο R πάει στην προβολή S της A στην NJ .

Επειδή η ευθεία AI παραμένει η ίδια, αρκεί να δείξουμε ότι η AI είναι εφαπτομένη στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου MNS .

Έστω A' το άλλο σημείο τομής της AI με τον περιγεγραμμένο κύκλο ω του τριγώνου ABC . Είναι γνωστό ότι η $A'N$ είναι διάμετρος του ω , άρα τα $A',$, είναι συνευθειακά (δείτε π.χ. τη λύση του [OLY2014-A20](#)). Η $A'B$ είναι εφαπτομένη στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου BMN αφού $\angle A'BM = \angle A'AC = \alpha/2 = \angle BMN$. Άρα $(A'B)^2 = (AM)(AN)$. Είναι όμως επίσης γνωστό ότι $A'B = A'I$. (Διότι $\angle BA'I = \angle BCA = \gamma$, $\angle A'BI = \angle A'BC + \angle CBI = \alpha/2 + \beta/2$, άρα και $\angle BIA' = \alpha/2 + \beta/2 = \angle A'BI$.) Επομένως έχουμε $(A'I)^2 = (A'M)(A'N)$ από το οποίο προκύπτει ότι η AI είναι εφαπτομένη στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου MIN .

Έχουμε $\angle JAN = 90^\circ$ και $\angle ASJ = 90^\circ$. Τα τρίγωνα JAN και JSA είναι λοιπόν όμοια από όπου συμπεραίνουμε ότι $(JS)(JN) = (JA)^2 = (JI)^2$. Άρα η AI είναι και εφαπτομένη στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου NSI .

Από τα πιο πάνω, οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των MIN και NSI ταυτίζονται και έχουν εφαπτομένη την AI . Άρα η AI είναι εφαπτομένη στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου MNS όπως θέλαμε να δείξουμε.