



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2021-B12

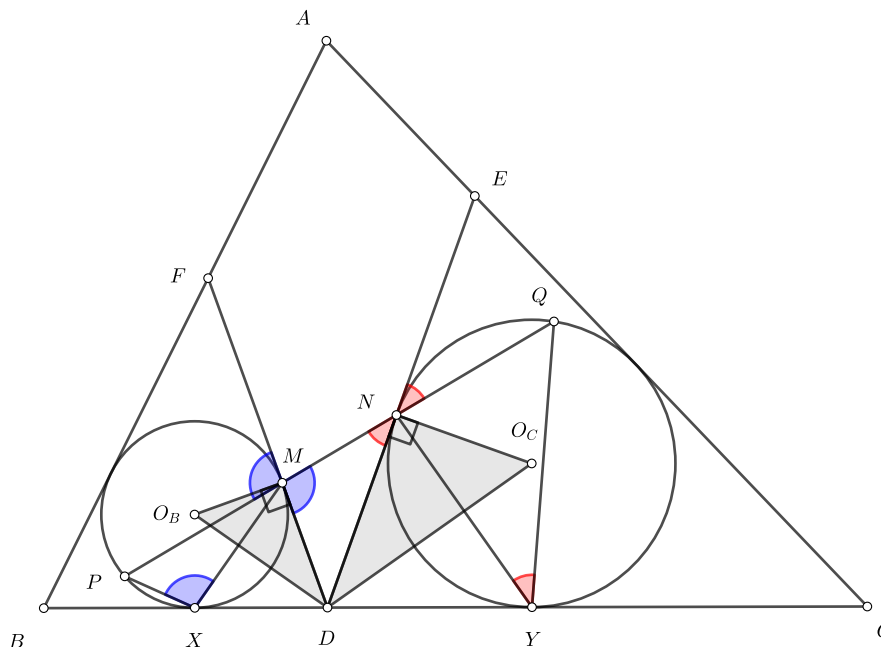
Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Έστω οξυγώνιο τρίγωνο ABC και έστω D, E , και F τα ίχνη των υψών από τις κορυφές A, B , και C αντίστοιχα. Έστω ω_B και ω_C οι εγγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων BDF και CDE και έστω ότι αυτοί οι κύκλοι είναι εφαπτόμενοι στα τμήματα DF και DE στα σημεία M και N αντίστοιχα. Έστω ότι η ευθεία MN τέμνει ξανά τους ω_B και ω_C στα σημεία $P \neq M$ και $Q \neq N$ αντίστοιχα. Ναδειχθεί ότι $MP = NQ$.

Πηγή: IMO Shortlist 2019

Προτεινόμενη Λύση



Γνωρίζουμε ότι το τετράπλευρο $ACDF$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο διαμέτρου AC . Αν λοιπόν γράψουμε O_C για το κέντρο του ω_C τότε έχουμε

$$\angle O_C D N = \frac{1}{2} \angle C D E = \alpha / 2$$

Ομοίως, αν O_B το κέντρο του ω_B έχουμε $\angle O_B D M = \alpha / 2$.

Επομένως τα ορθογώνια τρίγωνα O_BDM και O_CDN είναι όμοια. Ο λόγος ομοιότητάς τους είναι ίσος με $O_BM/O_CN = r_B/r_C$ όπου r_B, r_C οι ακτίνες των ω_B, ω_C αντίστοιχα.

Έστω X, Y τα σημεία επαφής των ω_B και ω_C αντίστοιχα με την BC . Έστω $\vartheta = \angle PXM$ και $\varphi = \angle NYQ$. Από το θεώρημα χορδής-εφαπτομένης έχουμε

$$\vartheta = \angle FMP = \angle DMN \quad \text{και} \quad \varphi = \angle ENQ = \angle MND$$

Τώρα έχουμε

$$\frac{\sin(\vartheta)}{\sin(\varphi)} = \frac{DN}{DM} = \frac{r_C}{r_B}$$

Άρα

$$PM = 2r_B \sin(\vartheta) = 2r_C \sin(\varphi) = QN$$