



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2021-B13

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Έστω ακέραιοι a, b τέτοιοι ώστε ο αριθμός $a \cdot 2^n + b$ είναι τέλειο τετράγωνο για κάθε φυσικό n .

Να δείξετε ότι $a = 0$.

Πηγή: Πολωνία 2001

Προτεινόμενη Λύση

Σίγουρα δεν μπορούμε να έχουμε $a < 0$ αφού τότε ο $a \cdot 2^n + b$ θα είναι αρνητικός για κάθε αρκετά μεγάλο n . Άρα δεν θα είναι τέλειο τετράγωνο.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $a > 0$. Έστω $x_n = \sqrt{a \cdot 2^n + b}$. Τότε η $x_1 < x_2 < x_3 < \dots$ είναι μια αύξουσα ακολουθία θετικών ακεραίων. Παρατηρούμε ότι

$$(2x_n)^2 - x_{n+2}^2 = 4(a \cdot 2^n + b) - a \cdot 2^{n+2} + b = 3b$$

Το πιο πάνω ισχύει για κάθε n . Τότε για κάθε n ο αριθμός $x_{n+2}^2 + 3b$ είναι τέλειο τετράγωνο. Θα δείξουμε αρχικά ότι $b = 0$.

Αν $b > 0$, παίρνουμε $n \geq 3b$. Τότε $x_{n+2} \geq n + 2 > 3b$. Άρα $x_{n+2}^2 < x_{n+2}^2 + 3b < x_{n+2}^2 + x_{n+2} < (x_{n+2} + 1)^2$, άτοπο.

Ομοίως αν $b < 0$ παίρνουμε $n \geq -3b$. Τότε $x_{n+2} > -3b$ και παίρνουμε $x_{n+2}^2 > x_{n+2}^2 + 3b > x_{n+2}^2 - x_{n+2} \geq (x_{n+2} - 1)^2$ πάλι άτοπο.

Άρα όντως $b = 0$. Όμως και αυτό είναι άτοπο αφού τότε τόσο το a όσο και το $2a$ θα είναι τέλεια τετράγωνα.

Επομένως $a = 0$ όπως θέλαμε να δείξουμε.