



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2021-B15

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Δίνεται πολώνυμο $P(x)$ βαθμού $n \geq 5$ με ακέραιους συντελεστές και n διαφορετικές ακέραιες ρίζες. Αν το 0 είναι μία από τις ρίζες του $P(x)$, να βρεθούν όλες οι ακέραιες ρίζες του $P(P(x))$.

Πηγή: Διαγωνισμός Τσεχίας - Σλοβακίας 1998

Προτεινόμενη Λύση

Κάθε ρίζα του $P(x)$ είναι και ρίζα του $P(P(x))$. Θα δείξουμε ότι το $P(P(x))$ δεν έχει άλλες ακέραιες ρίζες.

Έστω $m_1 = 0, m_2, m_3, \dots, m_n$ οι ακέραιες ρίζες του $P(x)$. Τότε

$$P(x) = kx(x - m_2) \cdots (x - m_n)$$

για κάποιον ακέραιο k .

Έστω m μια ακέραια ρίζα του $P(P(x))$ αλλά όχι του $P(x)$. Τότε $P(m) = m_i$ για κάποιο $i \in \{2, 3, \dots, n\}$. (Δεν μπορούμε να έχουμε $m_i = m_1$ αφού τότε $m_i = 0$ και το m θα ήταν ρίζα του P .) Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $i = n$.

Έχουμε

$$m_n = P(m) = km(m - m_2) \cdots (m - m_n)$$

Τότε $m|m_n$, έστω $m_n = \ell m$. Θα έχουμε επίσης $m - m_n|m_n$ και χρησιμοποιώντας ότι $m_n = \ell m$ παίρνουμε $1 - \ell|\ell$ που δίνει ότι $1 - \ell|1$. Δηλαδή $\ell = 0$ ή $\ell = 2$. Δεν μπορούμε να έχουμε $\ell = 0$ αφού τότε θα είχαμε $m_n = 0$. Άρα $\ell = 2$ και $m_n = 2m$. Παίρνουμε

$$2m = km(m - m_2) \cdots (m - m_{n-1})(m - m_n) = km(m - m_2) \cdots (m - m_{n-1})(m - 2m)$$

Άρα

$$2 = -km(m - m_2) \cdots (m - m_{n-1})$$

Τα $m = m - m_1, m - m_2, \dots, m - m_{n-1}$ είναι τουλάχιστον τέσσερις διαφορετικοί μεταξύ τους μη μηδενικοί ακέραιοι. Το γινόμενο τους, σε απόλυτη τιμή είναι τουλάχιστον $|1 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot (-2)| = 4$. Καταλήγουμε λοιπόν σε άτοπο όπως θέλαμε.

