



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2022-A03

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Δίνεται τετράγωνο $ABCD$ και σημείο P τέτοιο, ώστε $AP = AB$ και $\angle CPD = 90^\circ$.

Να δείξετε ότι $DP = 2CP$.

Πηγή: Πολωνία Junior 2016

Προτεινόμενη Λύση 1

Έστω ότι η παράλληλη από το P στην AD τέμνει τις AB και CD στα X και Y αντίστοιχα. Έστω επίσης ότι η παράλληλη από το P στην AB τέμνει τις AD και BC στα Z και W αντίστοιχα.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας $AB = 1$. Έστω $XP = a$ και $ZP = b$. Τότε $PY = 1 - a$ και $PW = 1 - b$. Από εφαρμογές του Πυθαγορείου Θεωρήματος έχουμε

$$1 = AD^2 = AP^2 = AX^2 + XP^2 = a^2 + b^2 \quad (1)$$

και

$$\begin{aligned} 1 &= DC^2 = DP^2 + PC^2 \\ &= (DY^2 + YP^2) + (PY^2 + YC^2) \\ &= (b^2 + (1 - a)^2) + (1 - a)^2 + (1 - b)^2 \\ &= 2(a^2 + b^2) - 4a - 2b + 3. \end{aligned} \quad (2)$$

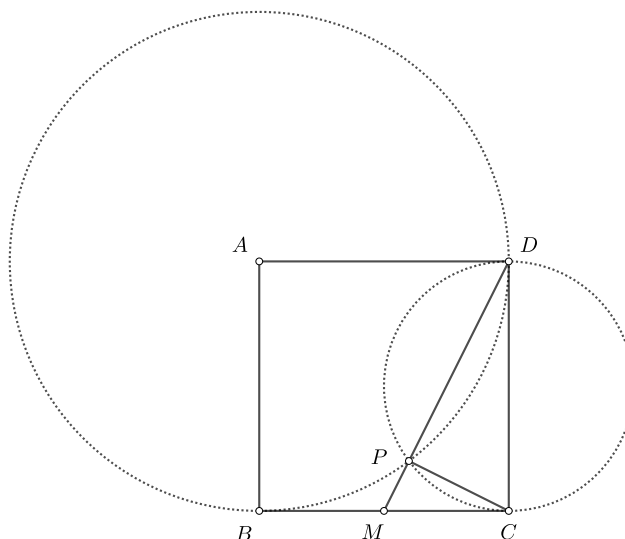
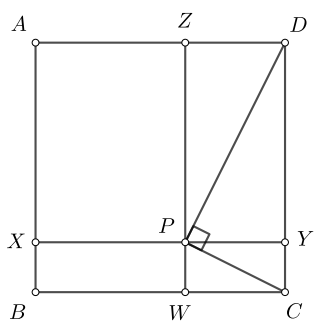
Από τις (1) και (2) παίρνουμε $4a + 2b = 2(a^2 + b^2) + 2 = 4$. Παίρνουμε $b = 2(1 - a)$ και αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε

$$1 = a^2 + b^2 = a^2 + 4(1 - 2a + a^2) \implies 5a^2 - 8a + 3 = 0 \implies a = 1 \text{ ή } a = \frac{3}{5}.$$

Η περίπτωση $a = 1$ απορρίπτεται αφού πρέπει $0 < a < 1$. Άρα $a = \frac{3}{5}$ και $b = \frac{4}{5}$. Τότε

$$DP^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{4}{5} \quad \text{και} \quad CP^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{5}.$$

Άρα $DP = 2CP$.



Προτεινόμενη Λύση 2

Έστω ω_1 ο κύκλος με κέντρο το A και ακτίνα AB και ω_2 ο κύκλος με διάμετρο CD . Επειδή P, D κοινά σημεία των δύο κύκλων, τότε η ευθεία PD είναι ο ριζικός τους άξονας. (Δείτε τη λύση του [OLY2017A35](#).)

Επειδή BC είναι κοινή εφαπτομένη των δύο κύκλων το μέσο M της BC επίσης ανήκει στον ριζικό άξονα. (Δείξτε το!) Συνεπώς τα D, P, M είναι συνευθειακά.

Τα ορθογώνια τρίγωνα CPD και MPC είναι όμοια (αφού $\angle PDC = 90^\circ - \angle CMP = \angle PCM$) άρα

$$\frac{PD}{PC} = \frac{DC}{CM} = \frac{BC}{CM} = 2.$$