



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2022-A04

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Να βρείτε με πόσους τρόπους μπορούμε να διαμερίσουμε το σύνολο $\{1, 2, \dots, 10\}$ σε υποσύνολα μεγέθους 1 ή 2 το καθένα, ώστε σε κάθε υποσύνολο μεγέθους 2, τα στοιχεία του να είναι διαδοχικοί αριθμοί. Π.χ. μια τέτοια διαμέριση είναι η

$$\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}, \{6\}, \{7\}, \{8\}, \{9, 10\}$$

Σημείωση: Σε μια διαμέριση ενός συνόλου, κάθε στοιχείο του συνόλου ανήκει σε ακριβώς ένα από τα υποσύνολα της διαμέρισης

Προτεινόμενη Λύση

Ας γράψουμε A_n για το πλήθος των διαμερίσεων του συνόλου $\{1, 2, \dots, n\}$ που ικανοποιούν τις πιο πάνω συνθήκες.

Αν το n είναι σε υποσύνολο μεγέθους 1, μένει να διαμερίσουμε το σύνολο $\{1, 2, \dots, n-1\}$ που γίνεται με A_{n-1} τρόπους.

Αν το n είναι σε υποσύνολο μεγέθους 2, τότε είναι στο υποσύνολο $\{n-1, n\}$. Μένει να διαμερίσουμε το σύνολο $\{1, 2, \dots, n-2\}$ που γίνεται με A_{n-2} τρόπους.

Άρα $A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$ για κάθε $n \geq 2$. Επίσης $A_1 = 1$ και $A_2 = 2$. Η ακολουθία είναι η 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ... Δηλαδή $A_{10} = 89$ και η διαμέριση μπορεί να γίνει ακριβώς με 89 τρόπους.