



Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία
Στασίνου 36, Γραφ. 102, Στρόβολος 2003, Λευκωσία
Τηλέφωνο: 357 – 22378101, Φαξ: 357 – 22379122
cms@cms.org.cy, www.cms.org.cy

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2022-A06

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Θεωρούμε την ακολουθία Fibonacci που ορίζεται από τον αναδρομικό τύπο $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ για κάθε $n \geq 1$, με αρχικές τιμές $F_1 = F_2 = 1$.

Να δείξετε ότι δεν υπάρχει περιττός αριθμός n τέτοιος, ώστε το F_n να είναι πολλαπλάσιο του 2023.

Προτεινόμενη Λύση

Modulo 7 η ακολουθία Fibonacci είναι

$$1, 1, 2, 3, 5, 1, 6, 0, 6, 6, 5, 4, 2, 6, 1, 0, \dots$$

και μετά επαναλαμβάνεται περιοδικά.

Άρα $7|F_n \iff 8|n$. Ειδικότερα, δεν υπάρχει περιττός n ώστε $7|F_n$ άρα ούτε και περιττός n ώστε $2023|F_n$.