



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2022-A07

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

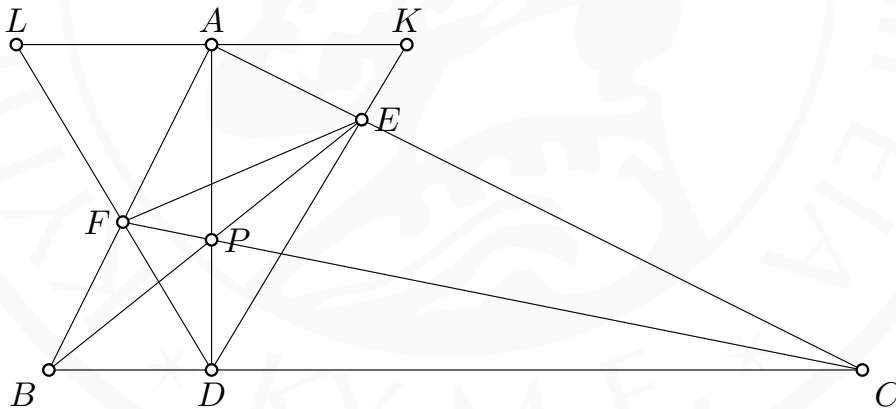
Πρόβλημα

Έστω τρίγωνο ABC και D το ίχνος του ύψους από το A στην BC . Έστω P σημείο στην AD και E, F τα σημεία τομής των BP και CP με τις AC και AB αντίστοιχα.

Να δείξετε ότι η AD διχοτομεί τη γωνία $\widehat{FDE}$.

Προτεινόμενη Λύση

Έστω ℓ η παράλληλη της BC που διέρχεται από το A . Έστω K και L τα σημεία τομής των DE και DF αντίστοιχα με την ℓ .



Από το Θεώρημα του Θαλή έχουμε

$$\frac{AF}{FB} = \frac{AL}{LD} \quad \text{και} \quad \frac{AE}{EC} = \frac{AK}{KD}$$

Από το Θεώρημα Ceva (δείτε τη λύση του προβλήματος [OLY2017-A19](#)) έχουμε

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1 \implies \frac{AL}{LD} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{AK}{KD} = 1 \implies AK = AL$$

Η DA είναι τότε διάμεσος και ύψος του τριγώνου DKL , άρα και διχοτόμος. Συνεπώς διχοτομεί τη γωνία $\widehat{FDE}$.