



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2022-B01

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Έστω $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ και $b_1 < b_2 < b_3 < \dots$ δύο αριθμητικές πρόοδοι θετικών ακεραίων. Γνωρίζουμε ότι υπάρχουν άπειρα ζεύγη θετικών ακεραίων (i, j) τέτοια, ώστε $i \leq j \leq i + 2021$ και $a_i \mid b_j$.

Να δείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο i υπάρχει θετικός ακέραιος j τέτοιος, ώστε $a_i \mid b_j$.

Πηγή: Βουλγαρία 2021

Προτεινόμενη Λύση

Έστω ότι η πρώτη ακολουθία έχει πρώτο όρο a και διαφορά d ενώ η δεύτερη έχει πρώτο όρο b και διαφορά d' .

Από τα άπειρα ζεύγη (i, j) με τη δεδομένη ιδιότητα, το $j - i$ μπορεί να λάβει μόνο 2022 διαφορετικές τιμές. Άρα υπάρχει σταθερό $k \in \{0, 1, 2, \dots, 2021\}$ ώστε να υπάρχουν άπειρα ζεύγη $(i, i + k)$ ώστε $a_i \mid b_{i+k}$. Έχουμε

$$\frac{b_{i+k}}{a_i} = \frac{b + (i + k - 1)d'}{a + (i - 1)d} = \frac{d'}{d} + \frac{b + kd' - ad'/d}{a + (i - 1)d} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \frac{d'}{d}$$

Επειδή το b_{i+k}/a_i είναι ακέραιος για άπειρες τιμές του i , αναγκαστικά πρέπει το d'/d να είναι ακέραιος. Έστω $d' = md$. Πρέπει επίσης για άπειρες τιμές του i να έχουμε $b_{i+k}/a_i = d'/d = m$. Από εδώ προκύπτει ότι $b + kd' - ad'/d = 0$, δηλαδή $b + kd' = am$.

Τότε όμως έχουμε $b_{i+k}/a_i = m$ για κάθε τιμή του i . Δηλαδή για κάθε i έχουμε $a_i \mid b_{i+k}$.