



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2022-B03

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Έστω μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί $a_1, \dots, a_n$, όχι όλοι ίσοι με 0.

(α) Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $p(x) = x^n - a_1x^{n-1} - \dots - a_{n-1}x - a_n$ έχει ακριβώς μία θετική πραγματική ρίζα R .

(β) Έστω

$$A = \sum_{i=1}^n a_i \quad \text{και} \quad B = \sum_{i=1}^n i a_i.$$

Να δείξετε ότι $A^A \leq R^B$.

Πηγή: IMO Shortlist 1996

Προτεινόμενη Λύση

Το (α) είναι άμεσο από τον κανόνα προσήμων του Descartes (δείτε τα Σχόλια). Μπορούμε επίσης να το δείξουμε και ως εξής:

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n}.$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(R) = 1$ έχει ακριβώς μία θετική πραγματική ρίζα. Επειδή η f είναι συνεχής, γνησίως φθίνουσα, με $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, τότε υπάρχει μοναδικό $R > 0$ με $f(R) = 1$.

Για το (β), επειδή η συνάρτηση $\ln x$ είναι κοίλη στο $(0, \infty)$, από την ανισότητα Jensen έχουμε

$$\frac{a_1}{A} \ln \frac{A}{R} + \frac{a_2}{A} \ln \frac{A}{R^2} + \dots + \frac{a_n}{A} \ln \frac{A}{R^n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{A} \ln \left(\frac{\frac{a_1}{R} + \dots + \frac{a_n}{R^n}}{(a_1 + \dots + a_n)/A} \right) = 0,$$

since

$$1 = f(R) = \frac{a_1}{R} + \dots + \frac{a_n}{R^n}.$$

Συνεπώς

$$A \ln A = (a_1 + \cdots + a_n) \ln A \leq a_1 \ln R + \cdots + a_n \ln R^n = B \ln R,$$

από το οποίο προκύπτει το ζητούμενο.

Σχόλια

Κανόνας προσήμων του Descartes

Αν βάλουμε τους όρους ενός πολυωνύμου σε φθίνουσα σειρά με βάση τον εκθέτη, τότε ο αριθμός των θετικών ριζών του πολυωνύμου είναι είτε ίσος με τον αριθμό των εναλλαγών προσήμου μεταξύ διαδοχικών μη μηδενικών συντελεστών, είτε μικρότερος αυτού κατά έναν άρτιο αριθμό.

Π.χ. στο πολυώνυμο $f(x) = x^5 - 3x^3 + x^2 + 2x - 7$ τότε οι όροι του πολυωνύμου (σε φθίνουσα σειρά με βάση τον εκθέτη) είναι οι 1, 0, -3, 1, 2, -7. Αγνοώντας τους μηδενικούς όρους, έχουμε 3 εναλλαγές προσήμου. (Από το 1 στο -3, από το -3 στο 1 και από το 2 στο -7.)

Άρα το πολυώνυμο έχει είτε μία είτε τρεις θετικές ρίζες.

Ας παρατηρήσουμε επίσης ότι οι αρνητικές ρίζες του πολυωνύμου είναι οι θετικές ρίζες του $f(-x) = -x^5 + 3x^3 + x^2 - 2x - 7$. Βάσει του κανόνα θα έχουμε είτε δύο είτε καμία θετική ρίζα.