



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2022-B05

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Έστω $\ell(n)$ ο μέγιστος πρώτος διαιρέτης του n . Ορίζουμε την ακολουθία (a_n) με $a_1 = 2$ και $a_{n+1} = a_n + \ell(a_n)$.

Να βρείτε όλους τους φυσικούς αριθμούς m τέτοιους, ώστε να υπάρχει $i \in \mathbb{N}$ ώστε $a_i = m^2$.

Πηγή: BMO Shortlist 2021

Προτεινόμενη Λύση

Θα δείξουμε ότι ένας αριθμός έχει τη συγκεκριμένη ιδιότητα αν και μόνο αν είναι πρώτος.

Γράφουμε $p_1, p_2, \dots$ για την ακολουθία των πρώτων αριθμών.

Λήμμα: Αν $a_n = p_i p_{i+1}$, τότε $a_{n+k} = (p_i + k)p_{i+1}$ για κάθε $k \in \{1, 2, \dots, p_{i+2} - p_2\}$.

Απόδειξη: Προχωράμε με επαγωγή στο k . Επειδή $\ell(a_n) = p_{i+1}$, τότε $a_{n+1} = a_n + p_{i+1} = (p_i + 1)p_{i+1}$. Ας υποθέσουμε επαγωγικά ότι $a_{n+r} = (p_i + r)p_{i+1}$ για κάποιο $r < p_{i+2} - p_i$. Για το επαγωγικό βήμα αρκεί να δείξουμε ότι $\ell(a_{n+r}) = p_{i+1}$ αφού τότε θα είχαμε $a_{n+r} = (p_i + r)p_{i+1} + p_{i+1} = (p_i + r + 1)p_{i+1}$.

Ας υποθέσουμε προς άτοπο ότι $\ell(a_{n+r}) \neq p_{i+1}$. Αφού $p_{i+1} | \ell(a_{n+r})$, τότε $\ell(a_{n+r}) > p_{i+1}$. Αφού επιπλέον $a_{n+r} = (p_i + r)p_{i+1}$, τότε $\ell(a_{n+r}) > p_{i+1}$ και συνεπώς $\ell(p_i + r) \geq p_{i+2}$. Αυτό όμως είναι άτοπο αφού $r < p_{i+2} - p_i$. $\square$

Αφού $a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 6 = 2 \cdot 3 = p_1 p_2$, από το πιο πάνω λήμμα, επαγωγικά, μπορούμε από τον τρίτο όρο και μετά να χωρίσουμε την ακολουθία σε κομμάτια της μορφής

$$p_i p_{i+1}, (p_i + 1)p_{i+1}, \dots, (p_{i+2} - 1)p_{i+1}$$

για $i = 1, 2, \dots$

Είναι άμεσο τώρα ότι ο p^2 εμφανίζεται στην ακολουθία για κάθε πρώτο p . Μένει να δείξουμε ότι κανένα άλλο τέλει τετράγωνο δεν εμφανίζεται στην ακολουθία.

Ας υποθέσουμε προς άτοπο ότι κάποιο άλλο τέλει τετράγωνο εμφανίζεται στο κομμάτι

$$p_i p_{i+1}, (p_i + 1)p_{i+1}, \dots, (p_{i+2} - 1)p_{i+1}$$

Επειδή όλοι οι όροι είναι πολλαπλάσιοι του p_{i+1} , τότε το τετράγωνο που εμφανίζεται είναι πολλαπλάσιο του p_{i+1}^2 . Επειδή επιπλέον πρέπει να είναι διαφορετικό από το p_{i+1}^2 , τότε είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το $4p_{i+1}^2$. Τότε όμως έχουμε ότι $p_{i+2} > 4p_{i+1}$ το οποίο όμως αντιβαίνει στο αίτημα του Bertrand. (Δείτε τα σχόλια που ακολουθούν.)

Σχόλια.

Θεώρημα (Αίτημα Bertrand)

Για κάθε φυσικό αριθμό $n > 1$ υπάρχει πρώτος αριθμός p ώστε $n < p < 2n$.

Στην περίπτωσή μας, παίρνουμε ότι υπάρχει πρώτος αριθμός p ώστε $p_{i+1} < p < 2p_{i+1}$. Άρα $p_{i+2} < 4p_{i+1}$ και καταλήγουμε σε άτοπο.

Έχουμε ακόμη πιο ισχυρά θεωρήματα από το Θεώρημα του Bertrand. Π.χ. αν το n είναι αρκετά μεγάλος τότε δεν υπάρχει μόνο ένας τέτοιος αριθμός αλλά «πολλοί».

Ας γράψουμε $\pi(N)$ για το πλήθος των πρώτων αριθμών οι οποίοι είναι μικρότεροι ή ίσοι του N . Το πιο κάτω θεώρημα μας λέει ότι ασυμπτωτικά το $\pi(N)$ είναι ίσο με $\frac{N}{\log N}$.

Θεώρημα Πρώτων Αριθμών

Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει φυσικός αριθμός n_0 (ο οποίος εξαρτάται από το ε) ώστε

$$(1 - \varepsilon) \frac{N}{\log N} < \pi(N) < (1 + \varepsilon) \frac{N}{\log N}$$

για κάθε $N > n_0$

Στο πιο πάνω Θεώρημα, ο λογάριθμος που χρησιμοποιούμε είναι ο φυσικός λογάριθμος, δηλαδή ο λογάριθμος με βάση το e .

Π.χ. για $\varepsilon = 1/10$ και N αρκετά μεγάλο έχουμε

$$\pi(2N) - \pi(N) > \frac{9}{10} \cdot \frac{2N}{\log(2N)} - \frac{11}{10} \cdot \frac{N}{\log N} > \frac{9}{10} \cdot \frac{2N}{\log(2N)} - \frac{11}{10} \cdot \frac{N}{\log 2N} = \frac{7N}{\log(2N)}$$

Δηλαδή έχουμε τουλάχιστον $\frac{7N}{\log(2N)}$ πρώτους μεταξύ των N και $2N$.

Μια άλλη συνέπεια του Θεωρήματος των Πρώτων Αριθμών είναι ότι μπορούμε να πούμε πόσο μεγάλος είναι περίπου ο νιοστός πρώτος αριθμός.

Θεώρημα

Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει φυσικός αριθμός n_1 (ο οποίος εξαρτάται από το ε) ώστε

$$(1 - \varepsilon)N \log N < p_N < (1 + \varepsilon)N \log N$$

για κάθε $N > n_1$

