



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2022-B07

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ τέτοιες, ώστε

$$f\left(\frac{f(x)}{x} + y\right) = 1 + f(y)$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^+$.

Πηγή: Βιετνάμ 2022

Προτεινόμενη Λύση

Γράφουμε $P(x, y)$ για την πρόταση

$$f\left(\frac{f(x)}{x} + y\right) = 1 + f(y)$$

Θα δείξουμε αρχικά ότι η f είναι 1-1. Ας υποθέσουμε προς άτοπο ότι υπάρχουν $a, b \in \mathbb{R}^+$ με $a < b$ και $f(a) = f(b) = k$. Τότε για κάθε $t \in \mathbb{R}^+$ από τα $P(a, t)$ και $P(b, t)$ έχουμε

$$f\left(t + \frac{k}{a}\right) = 1 + f(t) = f\left(t + \frac{k}{b}\right)$$

Θέτοντας $T = \frac{k}{a} - \frac{k}{b} > 0$ και $s = t + \frac{k}{b}$ στην πιο πάνω έχουμε $f(s) = f(s + T)$. Η συγκεκριμένη ισχύει για κάθε $s > \frac{k}{b}$. Επαγωγικά έχουμε $f(s) = f(s + nT)$ για κάθε $s > \frac{k}{b}$ και $n \in \mathbb{N}$.

Από την $P(1, y)$ έχουμε $f(f(1) + y) = 1 + f(y)$ για κάθε $y > 0$ και επαγωγικά έχουμε $f(y + mf(1)) = m + f(y)$ για κάθε $y > 0$ και $m \in \mathbb{N}$.

Παίρνουμε τώρα οποιοδήποτε $s > \frac{k}{b}$ και φυσικό $m > f(s)$. Παίρνουμε μετά φυσικό $n > mf(1)/T$ και ορίζουμε $y = s + nT - mf(1) > 0$. Από τα πιο πάνω έχουμε

$$f(s) = f(s + nT) = f(y + mf(1)) = m + f(y) > f(s)$$

το οποίο δίνει άτοπο.

Τα $P(x, 1)$ και $P(1, 1)$ δίνουν

$$f\left(\frac{f(x)}{x} + 1\right) = 1 + f(1) = f(f(1) + 1)$$

και αφού η f είναι 1-1, τότε $f(x)/x = f(1)$ για κάθε $x > 0$. Άρα

$$1 = \frac{f(f(1) + 1)}{1 + f(1)} = f(1)$$

και καταλήγουμε στο $f(x) = x$ για κάθε $x > 0$. Η συγκεκριμένη λύση προφανώς ικανοποιεί την ανισότητα.

