

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΚΑ' ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ 2020

28 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020



[Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ & Α' ΛΥΚΕΙΟΥ]

www.cms.org.cy

ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΚΑΙ ΑΓΓΛΙΚΑ
PAPERS IN BOTH GREEK AND ENGLISH

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ 2020

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ



Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία
Στασίνου 36, Γραφ. 102, Στρόβολος 2003, Λευκωσία
Τηλέφωνο: 357 – 22378101, Φαξ: 357 – 22379122
cms@cms.org.cy, www.cms.org.cy

ΚΑ΄ ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ

Κυριακή, 28 Ιουνίου 2020

ΔΟΚΙΜΙΟ

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ & Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΧΡΟΝΟΣ: 60 λεπτά

- Να συμπληρώσετε προσεκτικά το φύλλο απαντήσεων, επιλέγοντας μόνο μία απάντηση για κάθε ερώτηση. Η συμπλήρωση να γίνει με μαύρισμα στον αντίστοιχο κύκλο.
- Κάθε σωστή απάντηση βαθμολογείται με 4 μονάδες. Για κάθε λανθασμένη απάντηση αφαιρείται 1 μονάδα.
- Απάντηση σε άσκηση με μαύρισμα σε περισσότερους από έναν κύκλους θεωρείται λανθασμένη. Επειδή η διόρθωση θα γίνει ηλεκτρονικά, οποιοδήποτε επιπλέον σημάδι ή σβήσιμο μπορεί να καταστήσει την απάντηση λανθασμένη.
- Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τον χώρο δίπλα στις ασκήσεις για να κάνετε βοηθητικές πράξεις.
- Συστήνεται όπως σημειώνετε τις απαντήσεις σας στο ειδικό έντυπο απαντήσεων στα τελευταία πέντε λεπτά της εξέτασης, αφού βεβαιωθείτε ότι οι απαντήσεις σας είναι τελικές.

Παραδείγματα συμπλήρωσης απαντήσεων

1. Να υπολογίσετε το άθροισμα $2 + 3$.

A. 6

B. 5

Γ. 4

Δ. 3

Ε. 2

Σωστή συμπλήρωση

1. A B Γ Δ E

1. A B Γ Δ E

1. A B Γ Δ E

Λανθασμένη συμπλήρωση

1. A B Γ Δ E

1. A B Γ Δ E

1. A B Γ Δ E

1. Το γινόμενο

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \left(1 + \frac{1}{5}\right) \left(1 + \frac{1}{6}\right)$$

είναι ίσο με:

A. 7

B. 8

Γ. $\frac{7}{2}$

Δ. $\frac{7}{6}$

Ε. $\frac{4}{3}$

2. Αν

$$a \star \beta = \frac{a^2}{\sqrt{\beta}},$$

τότε το

$$[3 \star (2 \star 1)] \star 4$$

είναι ίσο με:

A. $\frac{81}{8}$

B. $\frac{81}{4}$

Γ. $\frac{9}{4}$

Δ. $\frac{9}{8}$

Ε. $\frac{9}{2}$

3. Το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού που προκύπτει από το γινόμενο

$$\Gamma = 2^{2018} \cdot 5^{2020}$$

είναι ίσο με:

A. 2

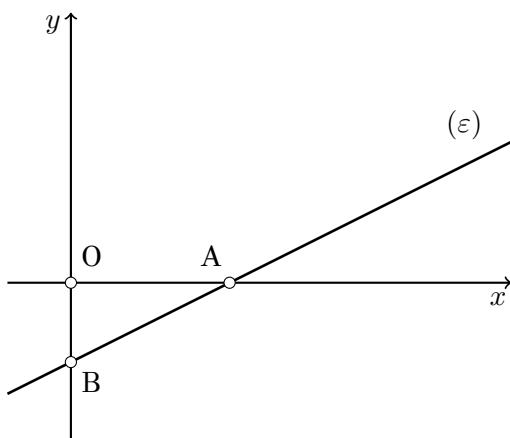
B. 4

Γ. 5

Δ. 7

Ε. 10

4. Στο πιο κάτω σχήμα η ευθεία (ε) τέμνει τους άξονες στα σημεία A και B έτσι, ώστε $(OA) = 2(OB)$, όπου O η αρχή των αξόνων.



Η κλίση της ευθείας (ε) είναι ίση με:

A. 2

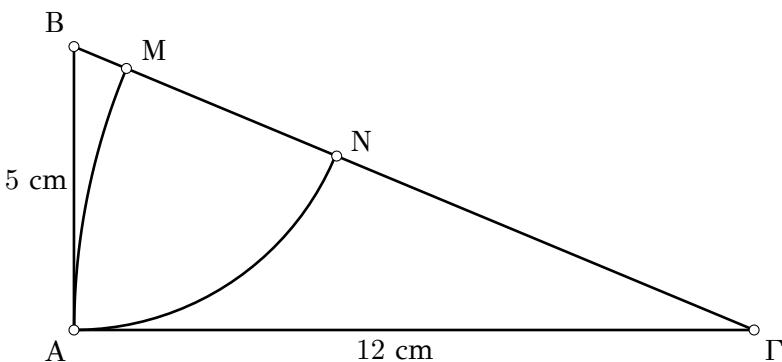
B. 1

Γ. $\frac{1}{2}$

Δ. $-\frac{1}{2}$

Ε. -2

5. Το μήκος ενός ορθογωνίου είναι κατά 10% μεγαλύτερο από το μήκος της πλευράς ενός τετραγώνου. Το πλάτος του ορθογωνίου είναι κατά 10% μικρότερο από το μήκος της πλευράς του τετραγώνου. Ο λόγος του εμβαδού του ορθογωνίου προς το εμβαδόν του τετραγώνου ισούται με:
- A. 99 : 100 B. 101 : 100 C. 1 : 1 D. 199 : 200 E. 201 : 200
6. Ένας μπογιατζής χρειάζεται 18 ώρες για να βάψει μιαν αίθουσα. Τρεις μπογιατζήδες εργάζονται με τον ίδιο ρυθμό όπως τον προηγούμενο, για να βάψουν μια άλλη αίθουσα με διπλάσιες διαστάσεις. Οι ώρες που θα χρειαστούν είναι:
- A. 12 B. 16 C. 24 D. 36 E. 48
7. Τα μήκη των πλευρών ενός παραλληλογράμμου είναι $x + 5$, $15 - x$, $2x + 10$ και $x + 15$. Η περίμετρος του παραλληλογράμμου ισούται με:
- A. 30 B. 40 C. 50 D. 55 E. 60
8. Στο ορθογώνιο $\triangle ABC$ με $\angle A = 90^\circ$, $AB = 5 \text{ cm}$ και $AC = 12 \text{ cm}$, γράφουμε τόξο με κέντρο το σημείο C και ακτίνα 12 cm , και τόξο με κέντρο το σημείο B και ακτίνα 5 cm . Τα δύο αυτά τόξα τέμνουν την υποτείνουσα στα σημεία M και N , αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



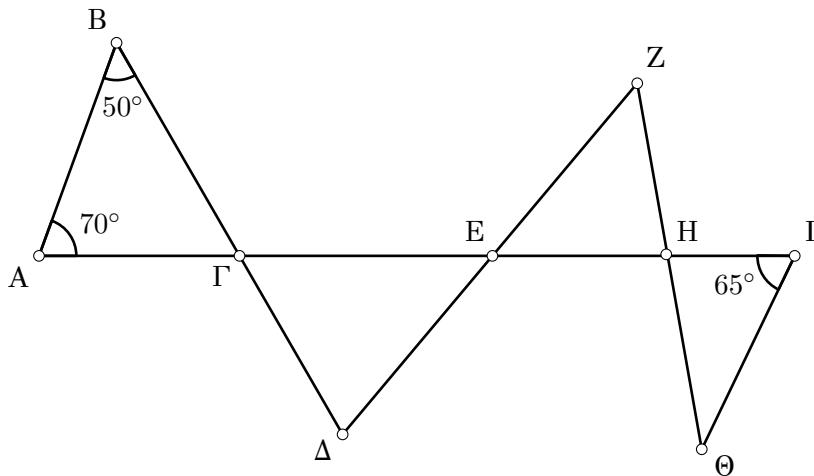
Το μήκος του MN ισούται με:

- A. 2 cm B. $\frac{13}{5} \text{ cm}$ C. 3 cm D. 4 cm E. $\frac{24}{5} \text{ cm}$
9. Σε ένα διαγώνισμα 25 ερωτήσεων, κάθε ορθή απάντηση βαθμολογείται με τέσσερις μονάδες, κάθε ερώτηση που δεν έχει απαντηθεί με μηδέν μονάδες και για κάθε λανθασμένη απάντηση αφαιρείται μία μονάδα. Από τις παρακάτω βαθμολογίες, η βαθμολογία ενός μαθητή στο διαγώνισμα δεν μπορεί να είναι ίση με:
- A. 95 B. 92 C. 91 D. 90 E. 89

- 10.** Οι θερμοκρασίες πέντε συνεχόμενων γημερών ήταν διαφορετικοί μεταξύ τους ακέραιοι αριθμοί. Αν το γινόμενο των πέντε θερμοκρασιών είναι 12, τότε ο μέσος όρος αυτών των θερμοκρασιών ισούται με:

A. 0 B. 0,2 C. 0,4 D. 0,6 E. 0,8

- 11.** Στο πιο κάτω σχήμα, το τρίγωνο $\triangle EZH$ είναι ισοσκελές με $HE = HZ$ και η γωνία $\angle \Delta$ είναι διπλάσια της γωνίας $\angle \Theta$.



Η γωνία $\angle \Delta$ είναι ίση με:

A. 30° B. 35° C. 50° D. 60° E. 70°

- 12.** Σε μια τάξη 34 μαθητών, 20 από αυτούς παίζουν πιάνο και 16 παίζουν κιθάρα. Το πλήθος των μαθητών που παίζουν και τα δύο όργανα είναι διπλάσιο από το πλήθος των μαθητών που δε παίζουν κανένα από αυτά τα όργανα. Το πλήθος των μαθητών που παίζουν κιθάρα, αλλά δεν παίζουν πιάνο, ισούται με:

A. 10 B. 12 C. 13 D. 14 E. 16

- 13.** Δύο τρένα κινούνται με αντίθετη φορά στην ίδια σιδηροδρομική γραμμή με αποτέλεσμα να συγκρουστούν. Η ταχύτητα του ενός από τα τρένα ήταν 85 km/h και η ταχύτητα του άλλου ήταν 95 km/h . Η απόστασή τους 5 λεπτά πριν από τη σύγκρουση ήταν:

A. 2 km B. 15 km C. 17 km D. 19 km E. 36 km

- 14.** Ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο 10 cm . Αν αυξήσουμε το μήκος του κατά 3 cm και το πλάτος του κατά 3 cm , τότε η αύξηση του εμβαδού του είναι:

A. 10 cm^2 B. 12 cm^2 C. 20 cm^2 D. 24 cm^2 E. 30 cm^2

15. Το πλήθος των πραγματικών τιμών του x , ώστε το σύνολο

$$A = \{x, x^2, 2x^2 - 1\}$$

να έχει ακριβώς δύο στοιχεία είναι:

A. 1

B. 3

Γ. 4

Δ. 5

Ε. 6

16. Από τους πιο κάτω αριθμούς, αυτός που δεν είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου είναι ο αριθμός:

A. 56169

B. 119716

Γ. 128164

Δ. 212521

Ε. 308242

17. Δύο ευθείες περνούν από το σημείο $(5, 4)$ και έχουν κλίσεις 2 και $-\frac{1}{3}$, αντίστοιχα. Το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν οι ευθείες με τον άξονα των x ισούται με:

A. 20

B. 28

Γ. 40

Δ. 56

Ε. 68

18. Υπάρχουν διάφοροι τρόποι κάποιος να έχει €207 σε κέρματα των €2 και χαρτονομίσματα των €5. Ένας τέτοιος τρόπος είναι να έχει ένα κέρμα των €2 και 41 χαρτονομίσματα των €5. Συμπεριλαμβανομένου και αυτού του τρόπου, το πλήθος όλων των τρόπων ισούται με:

A. 10

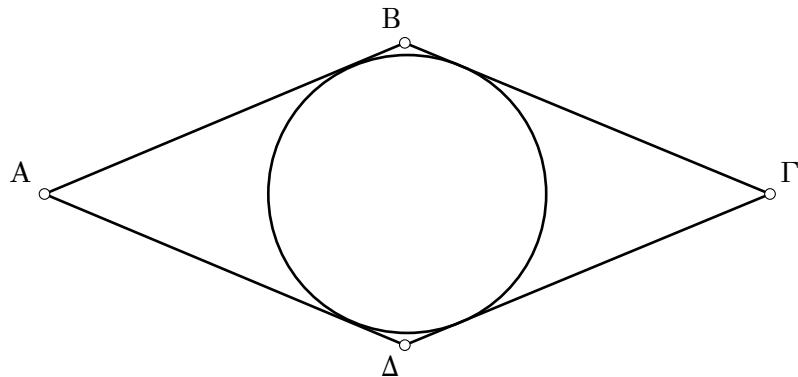
B. 19

Γ. 20

Δ. 21

Ε. 41

19. Στο πιο κάτω σχήμα, οι πλευρές του ρόμβου εφάπτονται του κύκλου.



Αν οι διαγώνιοι του ρόμβου είναι μήκους 10 cm και 24 cm, τότε η ακτίνα του κύκλου ισούται με:

A. 4 cm

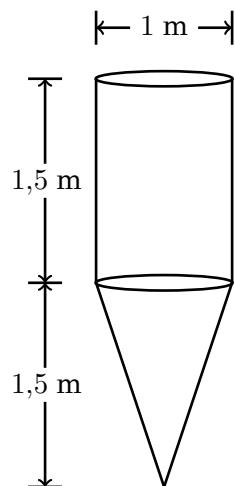
B. $\frac{58}{13}$ cm

Γ. $\frac{60}{13}$ cm

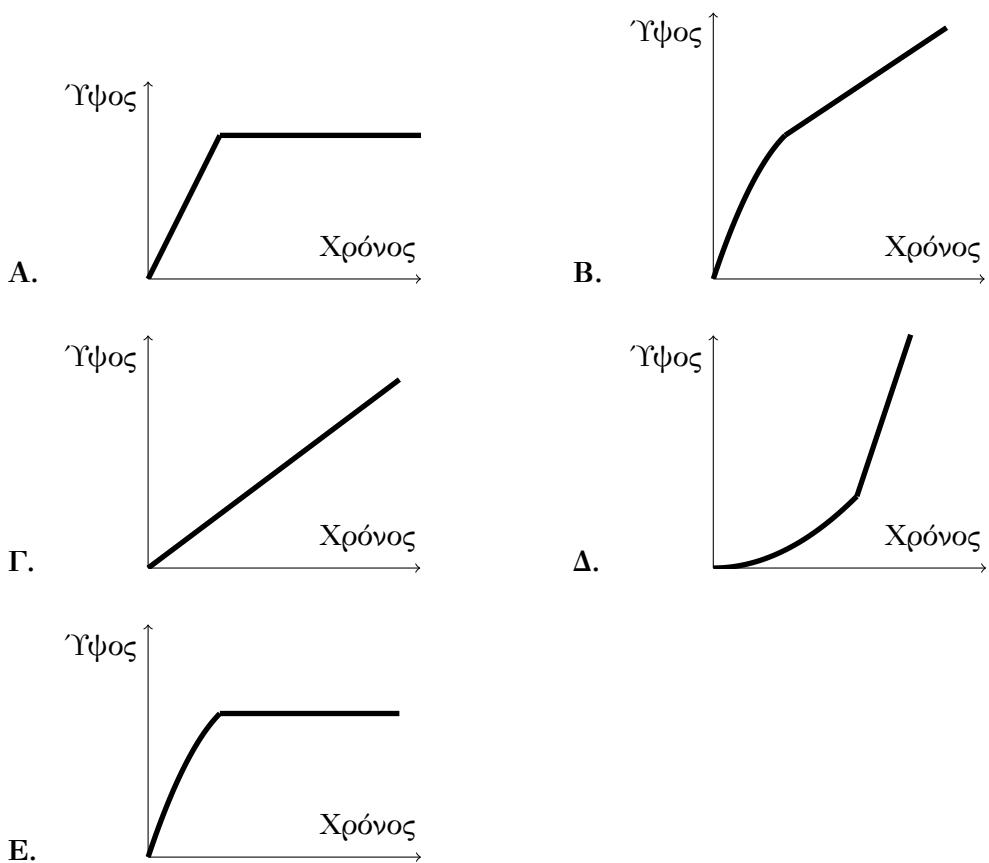
Δ. 6 cm

Ε. 10 cm

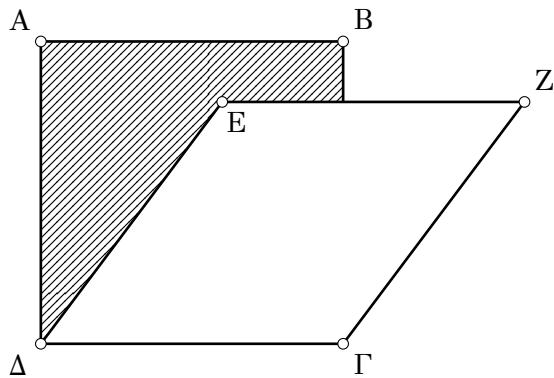
20. Ένα ντεπόζιτο νερού έχει τη μορφή και τις διαστάσεις που φαίνονται στο πιο κάτω σχήμα.



Αρχικά, το ντεπόζιτο είναι άδειο. Από τις πιο κάτω γραφικές παραστάσεις, αυτή που δείχνει πώς το ύψος του νερού μεταβάλλεται με την πάροδο του χρόνου είναι η:



21. Στο πιο κάτω σχήμα, το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο εμβαδού 25 cm^2 . Το ΕΖΓΔ είναι ρόμβος εμβαδού 20 cm^2 .



Το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής ισούται με:

- A. 9 cm^2 B. 10 cm^2 Γ. 11 cm^2 Δ. 12 cm^2 E. $12,5 \text{ cm}^2$
22. Ο N είναι ο μέγιστος πενταψήφιος φυσικός αριθμός, του οποίου το γινόμενο των ψηφίων του είναι ίσο με 120. Το άθροισμα των ψηφίων του N ισούται με:
- A. 14 B. 15 Γ. 17 Δ. 18 E. 20
23. Η τιμή της παραστασης

$$A = 2019 \cdot 2020 + 2020 \cdot 2021 - 2 \cdot 2019 \cdot 2021$$

ισούται με:

- A. 0 B. 2 Γ. 1110 Δ. 2022 E. Κανένα
από αυτά

24. Το πλήθος των ισοσκελών τριγώνων με ακέραια μήκη πλευρών και περίμετρο 2020 είναι ίσο με:

- A. 504 B. 506 Γ. 1009 Δ. 1516 E. 2020

25. Το πλήθος των διαφορετικών πρώτων διαιρετών του αριθμού

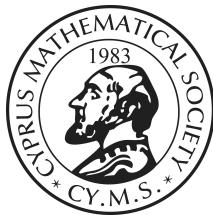
$$A = 7^8 - 7^7 - 42$$

είναι ίσο με:

- A. 3 B. 4 Γ. 5 Δ. 6 E. 7

**CYPRUS MATHEMATICAL
OLYMPIAD 2020**

ENGLISH VERSION



Cyprus Mathematical Society
36 Stasinou street, Off. 102, 2003 Strovolos, Nicosia
Tel: 357 – 22378101, Fax: 357 – 22379122
cms@cms.org.cy, www.cms.org.cy

21st CYPRUS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Sunday, June 28, 2020

EXAM PAPER 9th & 10th GRADE

TIME: 60 minutes

- Fill in carefully the answer sheet, by choosing only one answer to each question. The selection must be made by shading the right answer.
- Every correct answer is graded with 4 points. For each wrong answer, 1 point will be deducted.
- If a question is answered by shading more than one answer, the answer will be considered wrong. The correction will be made electronically, so any additional mark might be taken as wrong.
- You can use the space next to the questions to take extra notes.
- It is recommended that you complete the answer sheet in the last five minutes of the exam, making sure that your answers are final.

Examples of filling the answer sheet

1. Find the result $2 + 3$.

A. 6

B. 5

C. 4

D. 3

E. 2

Correct filling

1. A B Γ Δ E

1. A B Γ Δ E

1. A B Γ Δ E

Incorrect filling

1. A B Γ Δ E

1. A B Γ Δ E

1. A B Γ Δ E

1. The value of the product

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \left(1 + \frac{1}{5}\right) \left(1 + \frac{1}{6}\right)$$

is equal to:

A. 7

B. 8

Γ. $\frac{7}{2}$

Δ. $\frac{7}{6}$

Ε. $\frac{4}{3}$

2. If

$$a * \beta = \frac{a^2}{\sqrt{\beta}},$$

then

$$[3 * (2 * 1)] * 4$$

is equal to:

A. $\frac{81}{8}$

B. $\frac{81}{4}$

Γ. $\frac{9}{4}$

Δ. $\frac{9}{8}$

Ε. $\frac{9}{2}$

3. The sum of the digits of the outcome of the product

$$\Gamma = 2^{2018} \cdot 5^{2020}$$

is equal to:

A. 2

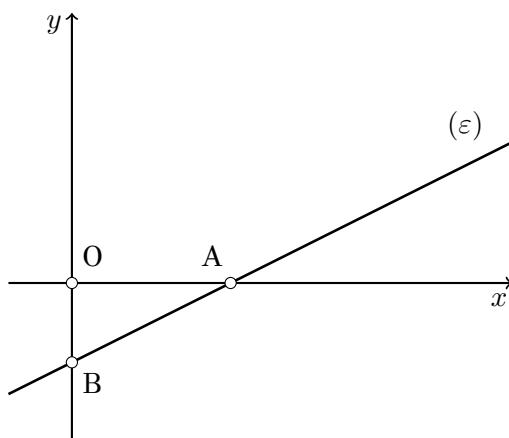
B. 4

Γ. 5

Δ. 7

Ε. 10

4. In the figure below, the line (ε) crosses the axes at the points A and B, such that $(OA) = 2(OB)$, where O is the origin.



The gradient of the line (ε) is equal to:

A. 2

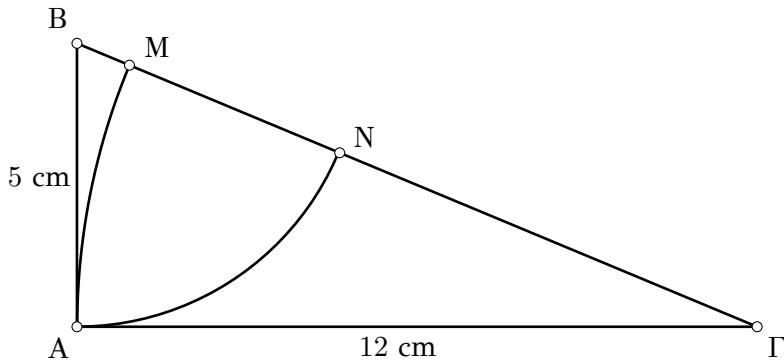
B. 1

Γ. $\frac{1}{2}$

Δ. $-\frac{1}{2}$

Ε. -2

5. The length of a rectangle is 10% greater than the length of the side of a square. The width of the rectangle is 10% smaller than the length of the side of the square. The ratio of the area of the rectangle to the area of the square is equal to:
- A. 99 : 100 B. 101 : 100 C. 1 : 1 D. 199 : 200 E. 201 : 200
6. A painter needs 18 hours to paint a hall. Three painters work at the same rate as the previous painter to paint a hall with double the dimensions. The number of hours that they will need is:
- A. 12 B. 16 C. 24 D. 36 E. 48
7. The lengths of the sides of a parallelogram are $x + 5, 15 - x, 2x + 10$ and $x + 15$. The perimeter of the parallelogram is equal to:
- A. 30 B. 40 C. 50 D. 55 E. 60
8. In right triangle $\triangle A B \Gamma$ with $\angle A = 90^\circ$, $AB = 5$ cm and $A\Gamma = 12$ cm, arcs of circles are drawn, one with center Γ and radius 12 cm, the other with center B and radius 5 cm. The two arcs intersect the hypotenuse in M and N, respectively, as shown in the figure below.



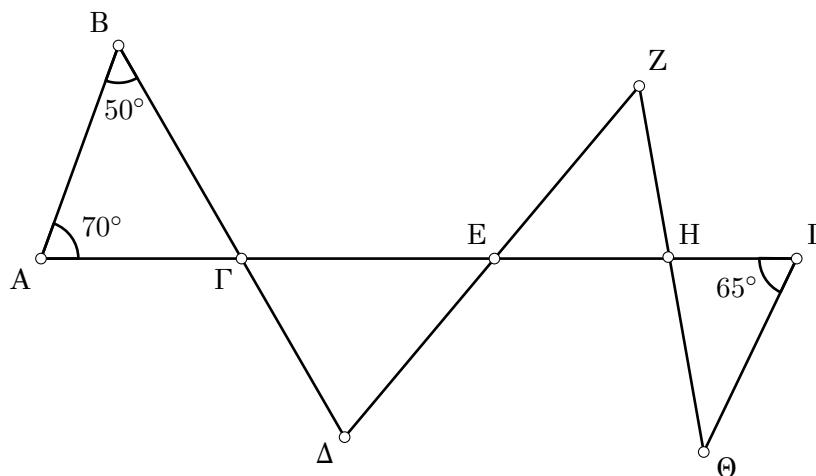
The length of MN is equal to:

- A. 2 cm B. $\frac{13}{5}$ cm C. 3 cm D. 4 cm E. $\frac{24}{5}$ cm
9. In a 25-question exam, every correct answer is worth four points, every unanswered question is worth zero points, and for every incorrect answer one point is deducted. From the following scores, the score of a student in this exam cannot be equal to:
- A. 95 B. 92 C. 91 D. 90 E. 89

- 10.** The temperatures of five consecutive days were distinct integers. If the product of the five temperatures is 12, then the average of these temperatures is equal to:

A. 0 B. 0,2 C. 0,4 D. 0,6 E. 0,8

- 11.** In the figure below, the triangle $\triangle EZH$ is isosceles with $HE = HZ$ and the size of angle $\angle \Delta$ is double the size of angle $\angle \Theta$.



The size of angle $\angle \Delta$ is equal to:

A. 30° B. 35° C. 50° D. 60° E. 70°

- 12.** In a class of 34 students, 20 of them play the piano and 16 of them play the guitar. The number of students which play both instruments is twice the number of students which do not play any of those instruments. The number of students who play the guitar but not the piano is equal to:

A. 10 B. 12 C. 13 D. 14 E. 16

- 13.** Two trains were moving on the same rail line and in opposite directions resulting in a collision. The speed of one of the trains was 85 km/h and the speed of the other was 95 km/h. Their distance 5 minutes before the collision was:

A. 2 km B. 15 km C. 17 km D. 19 km E. 36 km

- 14.** The perimeter of a rectangle is equal to 10 cm. If we increase its length by 3 cm and its width by 3 cm, then the increase of its area is:

A. 10 cm^2 B. 12 cm^2 C. 20 cm^2 D. 24 cm^2 E. 30 cm^2

15. The number of real numbers x , such that the set

$$A = \{x, x^2, 2x^2 - 1\}$$

has exactly two elements is:

- A. 1 B. 3 Γ. 4 Δ. 5 E. 6

16. From the numbers below, the one which is not a perfect square is the number:

- A. 56169 B. 119716 Γ. 128164 Δ. 212521 E. 308242

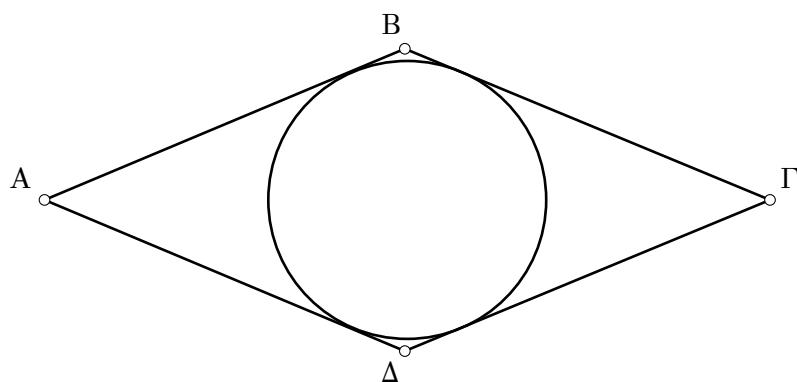
17. Two lines pass through the point $(5, 4)$ and have gradients 2 and $-\frac{1}{3}$, respectively. The area of the triangle created by these two lines and the x -axis is equal to:

- A. 20 B. 28 Γ. 40 Δ. 56 E. 68

18. There are various ways for someone to have €207 in coins of €2 and banknotes of €5. One of these is to have one coin of €2 and 41 banknotes of €5. Including this way, the number of all possible ways is equal to:

- A. 10 B. 19 Γ. 20 Δ. 21 E. 41

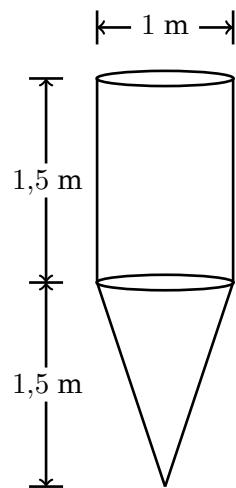
19. In the figure below the sides of the rhombus are tangent to the circle.



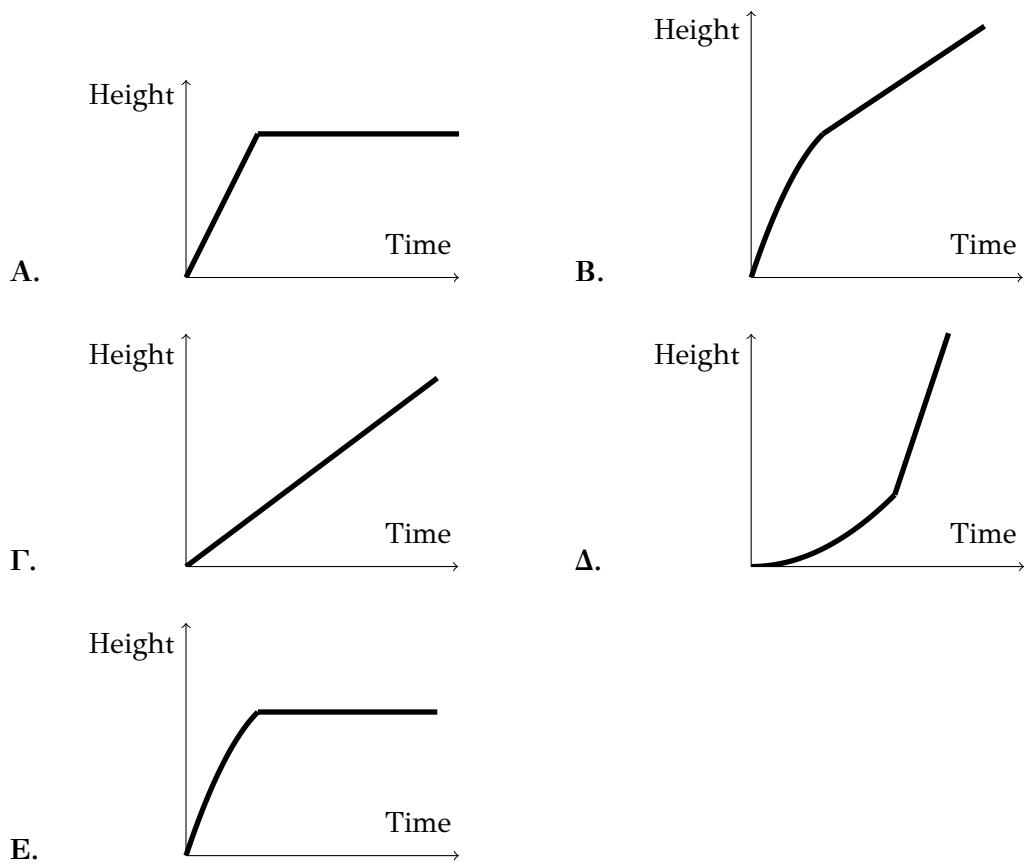
If the diagonals of the rhombus have lengths 10 cm and 24 cm, then the radius of the circle is equal to:

- A. 4 cm B. $\frac{58}{13}$ cm Γ. $\frac{60}{13}$ cm Δ. 6 cm E. 10 cm

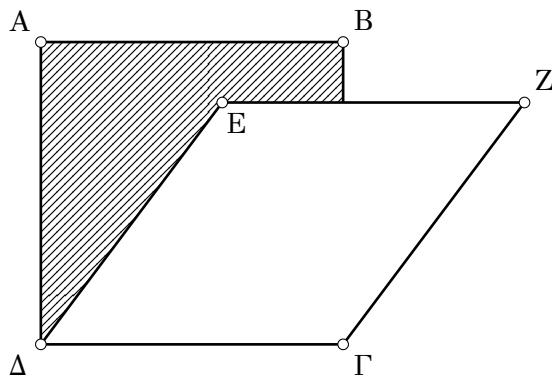
- 20.** A water tank has shape and dimensions as shown in the figure below.



Initially the tank is empty. From the following graphs, the one representing how the height of the water changes over time is:



- 21.** In the figure below $AB\Gamma\Delta$ is a square with area 25 cm^2 . $EZ\Gamma\Delta$ is a rhombus with area 20 cm^2 .



The shaded area is equal to:

- A. 9 cm^2 B. 10 cm^2 Γ. 11 cm^2 Δ. 12 cm^2 E. $12,5 \text{ cm}^2$

- 22.** N is the largest five-digit natural number whose product of digits is equal to 120. The sum of the digits of N is equal to:

- A. 14 B. 15 Γ. 17 Δ. 18 E. 20

- 23.** The value of the expression

$$A = 2019 \cdot 2020 + 2020 \cdot 2021 - 2 \cdot 2019 \cdot 2021$$

is equal to:

- A. 0 B. 2 Γ. 1110 Δ. 2022 E. None of these

- 24.** The number of isosceles triangles with integer side lengths and perimeter equal to 2020 is equal to:

- A. 504 B. 506 Γ. 1009 Δ. 1516 E. 2020

- 25.** The number of distinct prime divisors of

$$A = 7^8 - 7^7 - 42$$

is equal to:

- A. 3 B. 4 Γ. 5 Δ. 6 E. 7