ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΚΒ΄ ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ 2021

11 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2021

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ & Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

www.cms.org.cy

ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΑ **ΕΛΛΗΝΙΚΑ** ΚΑΙ **ΑΓΓΛΙΚΑ**
PAPERS IN BOTH **GREEK** AND **ENGLISH**

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ 2021

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία
Στασίνου 36, Γραφ. 102, Στρόβολος 2003, Λευκωσία
Τηλέφωνο: 357 – 22378101, Φαξ: 357 – 22379122
cms@cms.org.cy, www.cms.org.cy

ΚΒ΄ ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ

Κυριακή, 11 Απριλίου 2021

ΔΟΚΙΜΙΟ

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ & Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΧΡΟΝΟΣ: 60 λεπτά

- Να συμπληρώσετε προσεκτικά το φύλλο απαντήσεων, επιλέγοντας μόνο μία απάντηση για κάθε ερώτηση. Η συμπλήρωση να γίνει με μαύρισμα στον αντίστοιχο κύκλο.
- Κάθε σωστή απάντηση βαθμολογείται με 4 μονάδες. Για κάθε λανθασμένη απάντηση αφαιρείται 1 μονάδα.
- Απάντηση σε άσκηση με μαύρισμα σε περισσότερους από έναν κύκλους θεωρείται λανθασμένη. Επειδή η διόρθωση θα γίνει ηλεκτρονικά, οποιοδήποτε επιπλέον σημάδι ή σβήσιμο μπορεί να καταστήσει την απάντηση λανθασμένη.
- Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τον χώρο δίπλα στις ασκήσεις για να κάνετε βοηθητικές πράξεις.
- Συστήνεται όπως σημειώνετε τις απαντήσεις σας στο ειδικό έντυπο απαντήσεων στα τελευταία πέντε λεπτά της εξέτασης, αφού βεβαιωθείτε ότι οι απαντήσεις σας είναι τελικές.

Παραδείγματα συμπλήρωσης απαντήσεων

1. Να υπολογίσετε το άθροισμα $2 + 3$.

Α. 6 **Β.** 5 **Γ.** 4 **Δ.** 3 **Ε.** 2

Σωστή συμπλήρωση

1. Α **Β** Γ Δ Ε

1. Α Β Γ **Δ** Ε

1. Α Β Γ Δ Ε

Λανθασμένη συμπλήρωση

1. Α ~~Β~~ Γ Δ Ε

1. Α Β Γ Δ Ε

1. Α **Β** Γ **Δ** Ε

1. Αν

$$a = 2 - \sqrt{15} \quad \text{και} \quad \beta = \sqrt{6} - \sqrt{10},$$

τότε η τιμή της παράστασης

$$(a - \beta)(a + \beta)$$

είναι ίση με:

Α. 1 **Β.** 3 **Γ.** 5 **Δ.** 7 **Ε.** 9

2. Αν

$$f(x) = x^3 - 3x - 3(x + 3),$$

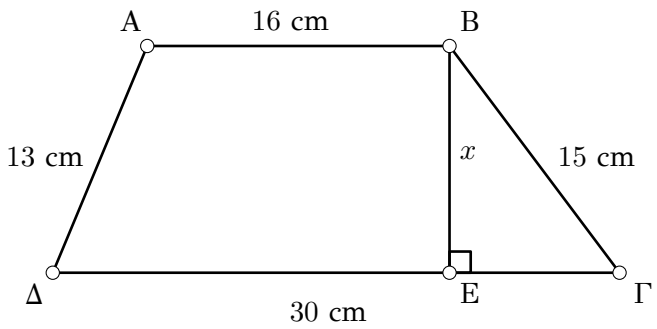
τότε το

$$f\left(f\left(3\right)\right)$$

είναι ίσο με:

Α. 0 **Β.** 3 **Γ.** -3 **Δ.** 9 **Ε.** -9

3. Στο πιο κάτω σχήμα, δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ $\parallel$ ΓΔ, ΑΒ $= 16$ cm, ΒΓ $= 15$ cm, ΓΔ $= 30$ cm και ΑΔ $= 13$ cm.



Το μήκος x του ΒΕ είναι ίσο με:

Α. 5 cm **Β.** 9 cm **Γ.** 12 cm **Δ.** 14 cm **Ε.** Κανένα από αυτά

4. Το άθροισμα των λύσεων της εξίσωσης

$$\sqrt{3 - 26x} = 3x$$

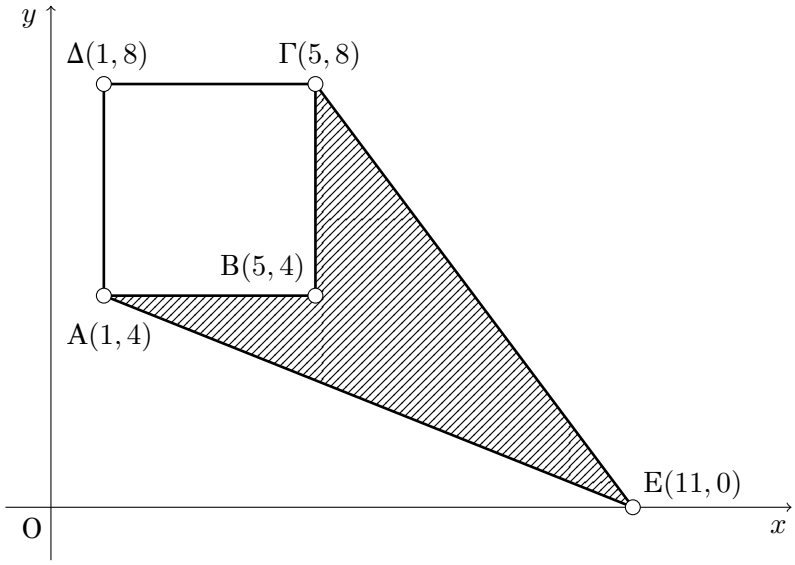
είναι ίσο με:

Α. $\frac{1}{9}$ **Β.** $-\frac{26}{9}$ **Γ.** $-\frac{27}{9}$ **Δ.** $\frac{28}{9}$ **Ε.** Κανένα από αυτά

5. Ευθεία (ε_1) περνά από το σημείο $\mathrm{A}(0,4)$ και έχει κλίση 2. Ευθεία (ε_2) έχει εξίσωση $5x-2y=-6$. Οι συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών (ε_1) και (ε_2) είναι:

Α. $(4,12)$ **Β.** $(0,3)$ **Γ.** $(-2,-2)$ **Δ.** $(2,8)$ **Ε.** $(0,4)$

6. Στο πιο κάτω σχήμα, δίνονται τα σημεία $\mathrm{A}(1,4)$, $\mathrm{B}(5,4)$, $\Gamma(5,8)$, $\Delta(1,8)$ και $\mathrm{E}(11,0)$.



Το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΓΕ ισούται με:

Α. 20 **Β.** 16 **Γ.** 22 **Δ.** 28 **Ε.** Κανένα από αυτά

7. Αν

$$a+\frac{1}{a}=4,$$

τότε η τιμή της παράστασης

$$a^3+\frac{1}{a^3}$$

ισούται με:

Α. 44 **Β.** 64 **Γ.** 54 **Δ.** 86 **Ε.** 52

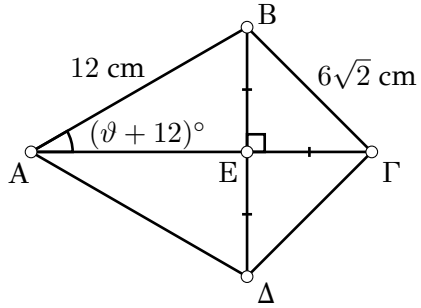
8. Στις 15:00, ο Θεόδωρος άρχισε να οδηγεί κατά μήκος ενός αυτοκινητόδρομου με σταθερή ταχύτητα 50 km/h. Ένα τέταρτο της ώρας αργότερα, η Χρύσα άρχισε να οδηγεί, από το ίδιο σημείο που ξεκίνησε ο Θεόδωρος και προς την ίδια κατεύθυνση, με σταθερή ταχύτητα 65 km/h. Η Χρύσα θα καταφέρει να φτάσει τον Θεόδωρο στις:

Α. 16:15 **Β.** 16:00 **Γ.** 15:15 **Δ.** 16:05 **Ε.** 15:55

9. Σε έναν ρόμβο, μία από τις τέσσερις πλευρές του και μία από τις δύο διαγώνιους του έχουν μήκος 10 cm η κάθε μία. Το εμβαδόν του ρόμβου ισούται με:

Α. 40 cm^2 **Β.** 50 cm^2 **Γ.** $50\sqrt{3}$ cm^2 **Δ.** 100 cm^2 **Ε.** $100\sqrt{3}$ cm^2

10. Στο πιο κάτω σχήμα, το ΑΒΓΔ είναι τετράπλευρο με ΑΒ = 12 cm, ΒΓ = $6\sqrt{2}$ cm, ΒΔ $\perp$ ΑΓ, ΒΕ = ΕΓ = ΕΔ και $\angle$ΒΑΓ = $(\vartheta + 12)^\circ$.



Η τιμή του ϑ ισούται με:

Α. 30 **Β.** 12 **Γ.** 33 **Δ.** 48 **Ε.** 18

11. Η τιμή του k, για την οποία οι ευθείες με εξισώσεις $4x + 7y = 15$ και $8kx + 28y = 20$ είναι παράλληλες, είναι ίση με:

Α. 2 **Β.** 4 **Γ.** $\frac{1}{2}$ **Δ.** $\frac{1}{4}$ **Ε.** Κανένα από αυτά

12. Η ευθεία που περνά από τα σημεία $(4, 5)$ και $(6, 6)$ τέμνει τον άξονα Oy στο σημείο:

Α. $(0, 0)$ **Β.** $(0, 1)$ **Γ.** $(0, 2)$ **Δ.** $(0, 3)$ **Ε.** $(0, 4)$

13. Η παράσταση

$$(x - 1)(x + 1)^3 – 2x(x - 1)(x + 1)$$

ισούται με:

Α. $x^4 + 1$ **Β.** x^4 **Γ.** $x^4 - 1$ **Δ.** $x^2 - 1$ **Ε.** Καμιά από αυτές

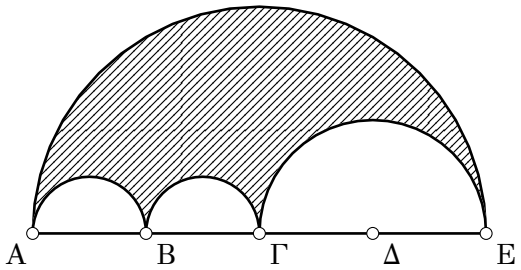
14. Αν $x = 2021$, τότε η τιμή της παράστασης

$$\frac{2x^5 + 2x^4}{x^3 + 2x^2 + x} \div \frac{4x^2}{2x + 2}$$

είναι ίση με:

Α. 4 **Β.** 2022 **Γ.** 4042 **Δ.** 2021 **Ε.** 1

15. Στο πιο κάτω σχήμα, δίνονται ημικύκλια με διαμέτρους ΑΒ, ΒΓ, ΓΕ και ΑΕ.



Αν ΑΕ = 24 cm και ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ΔΕ, τότε το σκιασμένο εμβαδόν ισούται με:

Α. 90π cm^2 **Β.** 45π cm^2 **Γ.** 48π cm^2 **Δ.** 24π cm^2 **Ε.** Κανένα από αυτά

16. Αν

$$A \circledast B = \frac{10 + A + B}{A - B}, \quad A \neq B$$

και ισχύει η σχέση

$$5 \circledast 3 = 10 \circledast x,$$

τότε η τιμή του x ισούται με:

Α. 7 **Β.** 6 **Γ.** 5 **Δ.** 2 **Ε.** 1,5

17. Δύο ακέραιοι αριθμοί m και n ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$m + n = 20$$
$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{5}{24}$$

Το γινόμενο mn είναι ίσο με:

Α. 24 **Β.** 36 **Γ.** 48 **Δ.** 72 **Ε.** 96

18. Σε ένα τουρνουά καλαθόσφαιρας υπάρχουν 10 ομάδες. Αν κάθε ομάδα παίζει με κάθε άλλη ομάδα ακριβώς μια φορά, τότε τα παιχνίδια που θα πραγματοποιηθούν είναι:

Α. 10 **Β.** 11 **Γ.** 40 **Δ.** 45 **Ε.** 49

19. Δέκα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, Ι και Κ βρίσκονται διαδοχικά σε ίση απόσταση πάνω σε έναν κύκλο. Το μέτρο, σε μοίρες, της γωνίας ∠ΑΔΗ είναι ίσο με:

Α. 36° **Β.** 54° **Γ.** 72° **Δ.** 75° **Ε.** 108°

20. Αν ισχύει ότι

$$\frac{p}{p-2q} = 3,$$

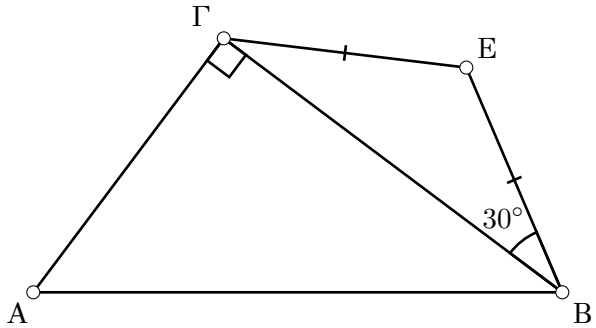
τότε η τιμή της παράστασης

$$\frac{p}{q}$$

ισούται με:

Α. -3 **Β.** 3 **Γ.** $\frac{1}{3}$ **Δ.** $\frac{2}{3}$ **Ε.** 2

21. Στο πιο κάτω σχήμα, έχουμε ότι ΑΒ = 5 cm, ΑΓ = 3 cm, ∠ΑΓΒ = 90°, ∠ΕΒΓ = 30° και ΕΓ = ΕΒ.



Το μήκος της ΕΒ είναι ίσο με:

Α. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm **Β.** $\sqrt{3}$ cm **Γ.** 2 cm **Δ.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ cm **Ε.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ cm

22. Το πλήθος των ακεραίων n, για τους οποίους ισχύει

$$\frac{1}{7} \leqslant \frac{6}{n} \leqslant \frac{1}{4},$$

είναι ίσο με:

Α. 17 **Β.** 18 **Γ.** 19 **Δ.** 20 **Ε.** 24

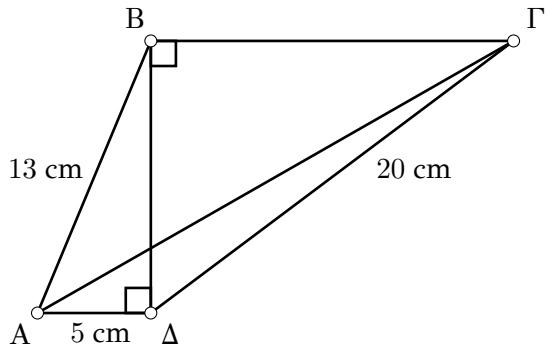
23. Το κλάσμα

$$\frac{a^{-4} - \beta^{-4}}{a^{-2} - \beta^{-2}}$$

για $a \neq 0, \beta \neq 0$ και $a \neq \beta$, είναι ίσο με:

Α. $a^{-6} - \beta^{-6}$ **Β.** $a^{-2} - \beta^{-2}$ **Γ.** $a^{-2} + \beta^{-2}$ **Δ.** $a^2 + \beta^2$ **Ε.** $a^2 - \beta^2$

24. Στο πιο κάτω σχήμα, έχουμε ότι ΑΒ = 13 cm, ΔΓ = 20 cm και ΑΔ = 5 cm.



Το μήκος του ΑΓ είναι ίσο με:

Α. $\sqrt{585}$ cm **Β.** $\sqrt{144}$ cm **Γ.** $\sqrt{600}$ cm **Δ.** $\sqrt{625}$ cm **Ε.** $\sqrt{441}$ cm

25. Αν x και y είναι θετικοί ακέραιοι με $xy = 6$, τότε το άθροισμα όλων των πιθανών τιμών του

$$\frac{2^{x+y}}{2^{x-y}}$$

είναι ίσο με:

Α. 4160 **Β.** 4180 **Γ.** 4164 **Δ.** 4176 **Ε.** 4128

CYPRUS MATHEMATICAL OLYMPIAD 2021

ENGLISH VERSION

Cyprus Mathematical Society
36 Stasinou street, Off. 102, 2003 Strovolos, Nicosia
Tel: 357 – 22378101, Fax: 357 – 22379122
cms@cms.org.cy, www.cms.org.cy

22nd CYPRUS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Sunday, April 11, 2021

EXAM PAPER

9th & 10th GRADE

TIME: 60 minutes

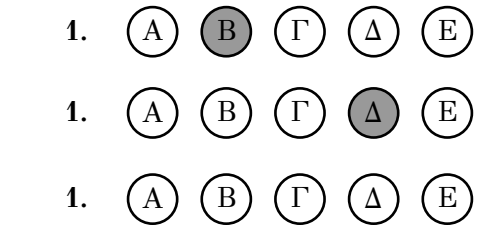
- Fill in carefully the answer sheet, by choosing only one answer to each question. The selection must be made by shading the right answer.
- Every correct answer is graded with 4 points. For each wrong answer, 1 point will be deducted.
- If a question is answered by shading more than one answer, the answer will be considered wrong. The correction will be made electronically, so any additional mark might be taken as wrong.
- You can use the space next to the questions to take extra notes.
- It is recommended that you complete the answer sheet in the last five minutes of the exam, making sure that your answers are final.

Examples of filling the answer sheet

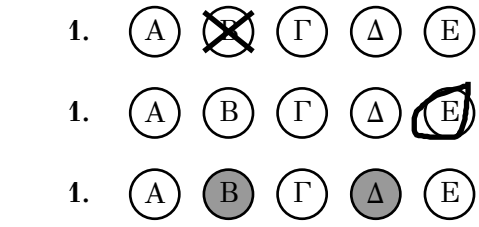
1. Find the result $2 + 3$.

A. 6 **B.** 5 **Γ.** 4 **Δ.** 3 **E.** 2

Correct filling



Incorrect filling



1. If

$$a = 2 - \sqrt{15} \quad \text{and} \quad \beta = \sqrt{6} - \sqrt{10},$$

then the value of the expression

$$(a - \beta)(a + \beta)$$

is equal to:

A. 1 **B.** 3 **Γ.** 5 **Δ.** 7 **E.** 9

2. If

$$f(x) = x^3 - 3x - 3(x + 3),$$

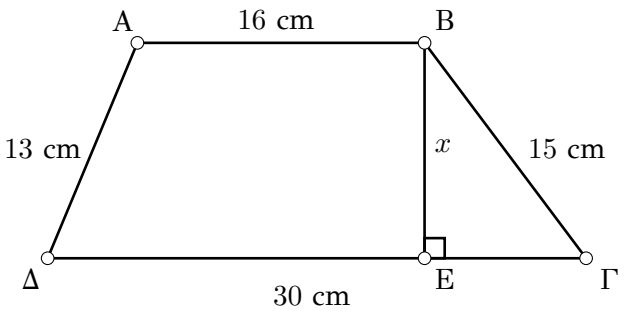
then

$$f\left(f\left(3\right)\right)$$

is equal to:

A. 0 **B.** 3 **Γ.** -3 **Δ.** 9 **E.** -9

3. In the figure below, ΑΒΓΔ is a trapezoid with ΑΒ ∥ ΓΔ, ΑΒ = 16 cm, ΒΓ = 15 cm, ΓΔ = 30 cm and ΑΔ = 13 cm.



The length x of BE is equal to:

A. 5 cm **B.** 9 cm **Γ.** 12 cm **Δ.** 14 cm **E.** None of these

4. The sum of the solutions of the equation

$$\sqrt{3 - 26x} = 3x$$

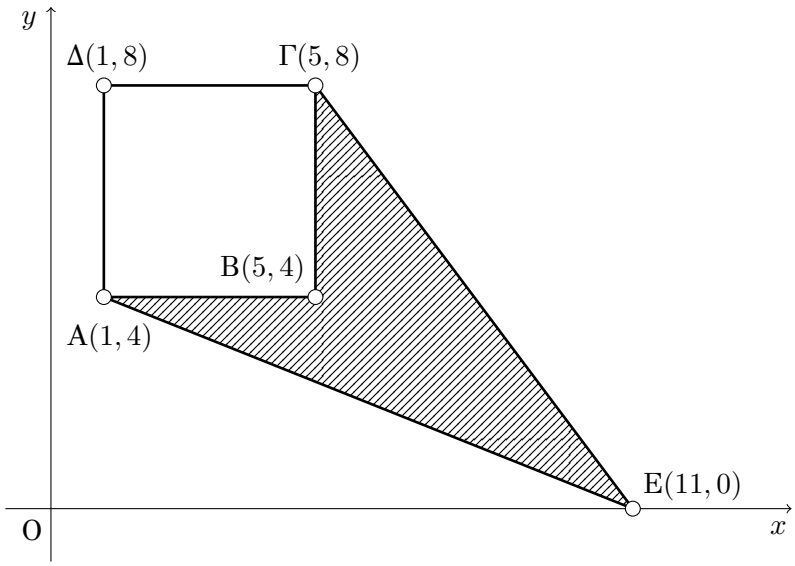
is equal to:

A. $\frac{1}{9}$ **B.** $-\frac{26}{9}$ **Γ.** $-\frac{27}{9}$ **Δ.** $\frac{28}{9}$ **E.** None of these

5. A straight line (ε_1) passes through the point $\mathrm{A}(0,4)$ and its slope is equal to 2. A straight line (ε_2) has equation $5x-2y=-6$. The coordinates of the point of intersection of the straight lines (ε_1) and (ε_2) are:

A. $(4,12)$ **B.** $(0,3)$ **Γ.** $(-2,-2)$ **Δ.** $(2,8)$ **E.** $(0,4)$

6. In the figure below, the points $\mathrm{A}(1,4)$, $\mathrm{B}(5,4)$, $\Gamma(5,8)$, $\Delta(1,8)$ and $\mathrm{E}(11,0)$ are given.



The area of the quadrilateral ΑΒΓΕ is equal to:

A. 20 **B.** 16 **Γ.** 22 **Δ.** 28 **E.** None of these

7. If

$$a+\frac{1}{a}=4,$$

then the value of the expression

$$a^3+\frac{1}{a^3}$$

is equal to:

A. 44 **B.** 64 **Γ.** 54 **Δ.** 86 **E.** 52

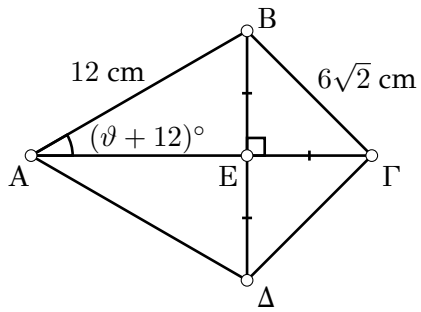
8. At 15:00, Theodoros started driving along a highway at a constant speed of 50 km/h. A quarter of an hour later, Chrysa started driving, from the same spot as Theodoros started and along same direction, at a constant speed of 65 km/h. Chrysa will catch up with Theodoros at:

A. 16:15 **B.** 16:00 **Γ.** 15:15 **Δ.** 16:05 **E.** 15:55

9. In a rhombus, one of its four sides and one of its two diagonals have length equal to 10 cm each. The area of the rhombus is equal to:

A. 40 cm^2 **B.** 50 cm^2 **Γ.** $50\sqrt{3}$ cm^2 **Δ.** 100 cm^2 **E.** $100\sqrt{3}$ cm^2

10. In the figure below, ΑΒΓΔ is a quadrilateral with ΑΒ = 12 cm, ΒΓ = $6\sqrt{2}$ cm, ΒΔ ⊥ ΑΓ, ΒΕ = ΕΓ = ΕΔ and ∠ΒΑΓ = $(\vartheta + 12)^\circ$.



The value of ϑ is equal to:

A. 30 **B.** 12 **Γ.** 33 **Δ.** 48 **E.** 18

11. The value of k, for which the lines with equations $4x + 7y = 15$ and $8kx + 28y = 20$ are parallel, is equal to:

A. 2 **B.** 4 **Γ.** $\frac{1}{2}$ **Δ.** $\frac{1}{4}$ **E.** None of these

12. The line passing through the points $(4, 5)$ and $(6, 6)$ intersects the axis Oy at the point:

A. $(0, 0)$ **B.** $(0, 1)$ **Γ.** $(0, 2)$ **Δ.** $(0, 3)$ **E.** $(0, 4)$

13. The expression

$$(x-1)(x+1)^3 - 2x(x-1)(x+1)$$

is equal to:

A. $x^4 + 1$ **B.** x^4 **Γ.** $x^4 - 1$ **Δ.** $x^2 - 1$ **E.** None of these

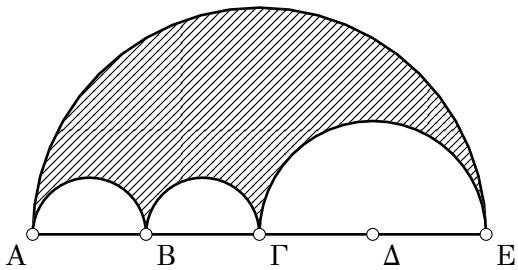
14. If $x = 2021$, then the value of the expression

$$\frac{2x^5 + 2x^4}{x^3 + 2x^2 + x} \div \frac{4x^2}{2x + 2}$$

is equal to:

A. 4 **B.** 2022 **Γ.** 4042 **Δ.** 2021 **E.** 1

15. In the figure below, semicircles with diameters AB, BΓ, ΓE and AE are given.



If AE = 24 cm and AB = BΓ = ΓΔ = ΔE, then the shaded area is equal to:

A. 90π cm^2 **B.** 45π cm^2 **Γ.** 48π cm^2 **Δ.** 24π cm^2 **E.** None of these

16. If

$$A \circledast B = \frac{10 + A + B}{A - B}, \quad A \neq B$$

and the relation

$$5 \circledast 3 = 10 \circledast x$$

holds, then the value of x is equal to:

A. 7 **B.** 6 **Γ.** 5 **Δ.** 2 **E.** 1,5

17. Two integers m and n satisfy the relations:

$$m + n = 20$$
$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{5}{24}$$

The product mn is equal to:

A. 24 **B.** 36 **Γ.** 48 **Δ.** 72 **E.** 96

18. There are 10 teams in a basketball tournament. If each team plays with each other team exactly once, then the number of games that will take place are:

A. 10 **B.** 11 **Γ.** 40 **Δ.** 45 **E.** 49

19. Ten points A, B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ, I and K are successively equidistant on a circle. The measure, in degrees, of the angle ∠AΔH is equal to:

A. 36° **B.** 54° **Γ.** 72° **Δ.** 75° **E.** 108°

20. If

$$\frac{p}{p-2q} = 3,$$

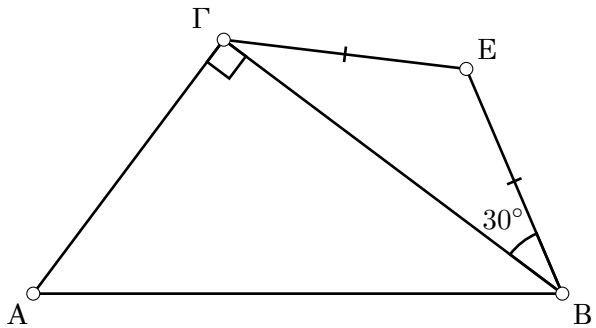
then the value of the expression

$$\frac{p}{q}$$

is equal to:

A. -3 **B.** 3 **Γ.** $\frac{1}{3}$ **Δ.** $\frac{2}{3}$ **E.** 2

21. In the figure below, we have that AB $= 5$ cm, AΓ $= 3$ cm, $\angle$AΓB $= 90°$, $\angle$EBΓ $= 30°$ and EΓ $=$ EB.



The length of EB is equal to:

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm **B.** $\sqrt{3}$ cm **Γ.** 2 cm **Δ.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ cm **E.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ cm

22. The number of integers n, for which

$$\frac{1}{7} \leqslant \frac{6}{n} \leqslant \frac{1}{4},$$

is equal to:

A. 17 **B.** 18 **Γ.** 19 **Δ.** 20 **E.** 24

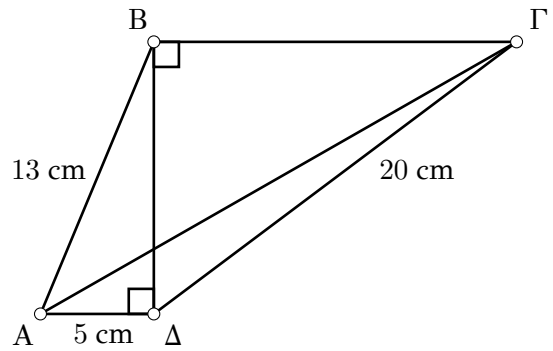
23. The fraction

$$\frac{a^{-4} - \beta^{-4}}{a^{-2} - \beta^{-2}}$$

for $a \neq 0, \beta \neq 0$ and $a \neq \beta$, is equal to:

A. $a^{-6} - \beta^{-6}$ **B.** $a^{-2} - \beta^{-2}$ **Γ.** $a^{-2} + \beta^{-2}$ **Δ.** $a^2 + \beta^2$ **E.** $a^2 - \beta^2$

24. In the figure below, we have that AB = 13 cm, ΔΓ = 20 cm and AΔ = 5 cm.



The length of AΓ is equal to:

A. $\sqrt{585}$ cm **B.** $\sqrt{144}$ cm **Γ.** $\sqrt{600}$ cm **Δ.** $\sqrt{625}$ cm **E.** $\sqrt{441}$ cm

25. If x and y are positive integers with $xy = 6$, then the sum of all possible values of

$$\frac{2^{x+y}}{2^{x-y}}$$

is equal to:

A. 4160 **B.** 4180 **Γ.** 4164 **Δ.** 4176 **E.** 4128