

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΚΓ' ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ 2022

10 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2022



Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ & Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

www.cms.org.cy

ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΚΑΙ ΑΓΓΛΙΚΑ
PAPERS IN BOTH GREEK AND ENGLISH

**ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ 2022**

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ



Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία
Στασίνου 36, Γραφ. 102, Στρόβολος 2003, Λευκωσία
Τηλέφωνο: 357 – 22378101, Φαξ: 357 – 22379122
cms@cms.org.cy, www.cms.org.cy

ΚΓ' ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ

Κυριακή, 10 Απριλίου 2022

ΔΟΚΙΜΙΟ

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ & Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΧΡΟΝΟΣ: 60 λεπτά

- Να συμπληρώσετε προσεκτικά το φύλλο απαντήσεων, επιλέγοντας μόνο μία απάντηση για κάθε ερώτηση. Η συμπλήρωση να γίνει με μαύρισμα στον αντίστοιχο κύκλο.
- Κάθε σωστή απάντηση βαθμολογείται με 4 μονάδες. Για κάθε λανθασμένη απάντηση αφαιρείται 1 μονάδα.
- Απάντηση σε άσκηση με μαύρισμα σε περισσότερους από έναν κύκλους θεωρείται λανθασμένη. Επειδή η διόρθωση θα γίνει ηλεκτρονικά, οποιοδήποτε επιπλέον σημάδι ή σβήσιμο μπορεί να καταστήσει την απάντηση λανθασμένη.
- Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τον χώρο δίπλα στις ασκήσεις για να κάνετε βοηθητικές πράξεις.
- Συστήνεται όπως σημειώνετε τις απαντήσεις σας στο ειδικό έντυπο απαντήσεων στα τελευταία πέντε λεπτά της εξέτασης, αφού βεβαιωθείτε ότι οι απαντήσεις σας είναι τελικές.

Παραδείγματα συμπλήρωσης απαντήσεων

1. Να υπολογίσετε το άθροισμα $2 + 3$.

A. 6

B. 5

Γ. 4

Δ. 3

Ε. 2

Σωστή συμπλήρωση

1. A B C D E

1. A B C D E

1. A B C D E

Λανθασμένη συμπλήρωση

1. A B C D E

1. A B C D E

1. A B C D E

1. Αν

$$\frac{a+\beta}{a-\beta} = 3,$$

τότε η τιμή της παράστασης

$$\frac{a}{\beta}$$

ισούται με:

A. 2

B. 3

Γ. $\frac{1}{2}$

Δ. 1

E. -1

2. Αν

$$f(x) = ax + \beta$$

με

$$f(1) = 5 \quad \text{και} \quad f(2) = 9,$$

τότε η τιμή της παράστασης

$$a^2 + \beta^2$$

ισούται με:

A. 13

B. 14

Γ. 17

Δ. 25

E. 106

3. Αν

$$(a+\beta)^2 = 25 \quad \text{και} \quad (a-\beta)^2 = 17,$$

τότε η τιμή της παράστασης

$$a\beta$$

ισούται με:

A. $\frac{5+\sqrt{17}}{4}$

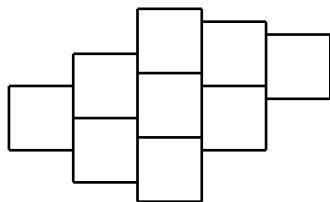
B. $5-\sqrt{17}$

Γ. 1

Δ. 2

E. 4

- 4.** Το πιο κάτω σχήμα αποτελείται από τετράγωνα πλευράς μήκους 1 cm. Η περίμετρος του σχήματος ισούται με:



A. 14 cm

B. 15 cm

Γ. 16 cm

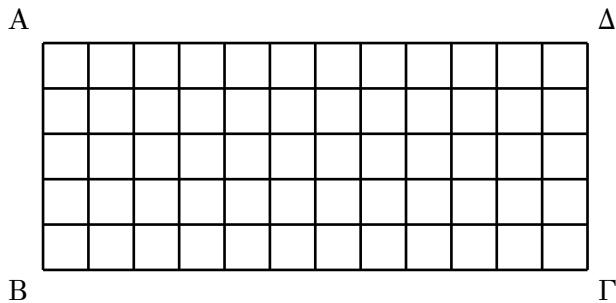
Δ. 17 cm

Ε. Δεν μπορεί να υπολογιστεί

5. Πέρυσι, στο σχολείο της Μαρίας, 315 από τους 600 μαθητές ήταν κορίτσια. Φέτος, ο αριθμός των μαθητών στο σχολείο αυξήθηκε κατά 40 μαθητές. Το ποσοστό των κοριτσιών παρέμεινε το ίδιο με πέρυσι. Το πλήθος των κοριτσιών του σχολείου φέτος είναι:

A. 335 B. 336 C. 337 D. 338 E. 339

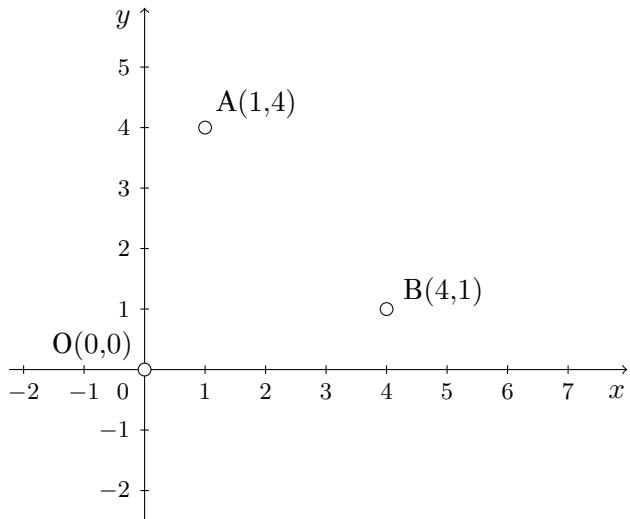
6. Το πιο κάτω ορθογώνιο παραλληλόγραμμο χωρίστηκε σε 60 ίσα τετράγωνα, όπου το καθένα έχει μήκος διαγωνίου 2 cm.



Το μήκος της διαγωνίου ΒΔ ισούται με:

A. 13 cm B. 26 cm C. $5\sqrt{2}$ cm D. $12\sqrt{2}$ cm E. $13\sqrt{2}$ cm

7. Τα σημεία $O(0,0)$, $A(1,4)$, $B(4,1)$, όπως φαίνονται στο πιο κάτω σχήμα, είναι κορυφές ενός παραλληλογράμμου.



Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ισούται με:

A. 12 B. 15 C. 16 D. 17 E. 19

8. Σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο το μήκος αυξήθηκε κατά 25% και το πλάτος μειώθηκε κατά $x\%$. Με αυτές τις τροποποιήσεις, το εμβαδόν αυξήθηκε κατά 20%. Η τιμή του x ισούται με:

A. 4

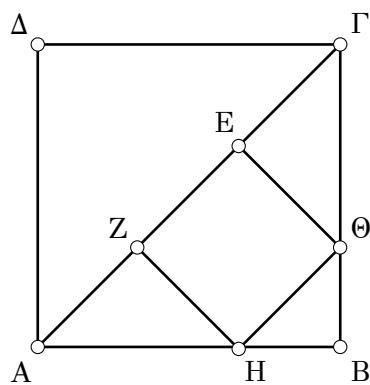
B. $4\frac{1}{3}$

Γ. $4\frac{1}{2}$

Δ. 5

Ε. Εξαρτάται από τις διαστάσεις του ορθογωνίου

9. Στο πιο κάτω σχήμα, τα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ είναι τετράγωνα.



Αν $AB = 1 \text{ cm}$, τότε το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ ισούται με:

A. $\frac{2}{9} \text{ cm}^2$

B. $\frac{1}{8} \text{ cm}^2$

Γ. $\frac{1}{4} \text{ cm}^2$

Δ. $\frac{2}{5} \text{ cm}^2$

Ε. $\frac{1}{3} \text{ cm}^2$

10. Η μεγαλύτερη ακέραια τιμή του x , για την οποία

$$3^{20} > 32^x,$$

είναι:

A. 3

B. 4

Γ. 5

Δ. 6

Ε. 7

11. Αν ο αριθμός

$$\overline{1\omega 2} + \overline{\omega 3} - 7\omega + 12$$

είναι τέλειο τετράγωνο, τότε η τιμή του ω είναι:

(Με $\overline{a\beta\gamma}$ συμβολίζουμε τον τριψήφιο αριθμό, όπου το a είναι το φηφίο των εκατοντάδων, το β είναι το φηφίο των δεκάδων και το γ είναι το φηφίο των μονάδων.)

A. 1

B. 2

Γ. 3

Δ. 4

Ε. 5

12. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο, οι διάμεσοι από τις κορυφές του τριγώνου με τις οξείες γωνίες έχουν μήκη 5 cm και $\sqrt{50}$ cm. Το μήκος της υποτείνουσάς του ισούται με:

- A. $(4 + \sqrt{15})$ cm B. $\sqrt{15}$ cm C. $2\sqrt{15}$ cm
 D. 60 cm E. $(4 + 2\sqrt{15})$ cm

13. Ο αριθμός

$$63 + 2 \cdot 63 + 3 \cdot 63 + \dots + 48 \cdot 63$$

ισούται με a^3 . Η τιμή του a είναι:

- A. 41 B. 42 C. 43 D. 52 E. 53

14. Αν $x < -1$, τότε από τις πιο κάτω προτάσεις, αυτή που ισχύει είναι η:

- A. $x < x^2 < x^3$ B. $x < x^3 < x^2$ C. $x^2 < x^3 < x$
 D. $x^3 < x^2 < x$ E. $x^3 < x < x^2$

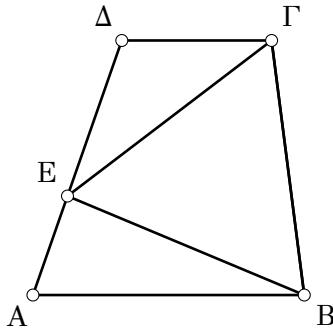
15. Το πλήθος των διαφορετικών πρώτων διαιρετών του

$$2^{2022} + 4^{1010} + 8^{675}$$

είναι:

- A. 1 B. 2 C. 3
 D. 4 E. Τουλάχιστον 5

16. Στο πιο κάτω σχήμα, δίνεται τραπέζιο $ABΓΔ$ με $AB \parallel ΓΔ$ και σημείο E στην πλευρά του $ΑΔ$ τέτοιο, ώστε το τρίγωνο $ΔΒΕΓ$ να είναι ισόπλευρο και τα τρίγωνα $ΔΑΒΕ$ και $ΔΓΔΕ$ να είναι ισοσκελή, με $ΑΒ = ΒΕ$ και $ΔΓ = ΔΕ$.



Το μέτρο της γωνίας $∠ΒΑΔ$ ισούται με:

- A. 50° B. 60° C. 65° D. 70° E. 80°

17. Έστω

$$N = 3x + 4y + 5\omega,$$

όπου το x είναι ίσο με 1 ή -1, το y είναι ίσο με 1 ή -1 και το ω είναι ίσο με 1 ή -1.
Το πλήθος των πιο κάτω προτάσεων, οι οποίες είναι αληθεύς είναι:

- (α) Το N μπορεί να είναι ίσο με 0.
- (β) Το N είναι πάντα περιττός.
- (γ) Το N δεν μπορεί να είναι 4.
- (δ) Το N είναι πάντα άρτιος.

A. 0

B. 1

Γ. 2

Δ. 3

E. 4

- 18.** Το πλήθος των θετικών ακεραίων από το 1 ως το 150 συμπεριλαμβανομένων, οι οποίοι διαιρούνται από τουλάχιστον δύο από τα 3, 5 και 7 είναι:

A. 12

B. 15

Γ. 19

Δ. 20

E. 21

- 19.** Από τους πιο κάτω αριθμούς, αυτός που διαιρεί τον

$$30^{2021} + 63^{2022}$$

είναι ο:

A. 7

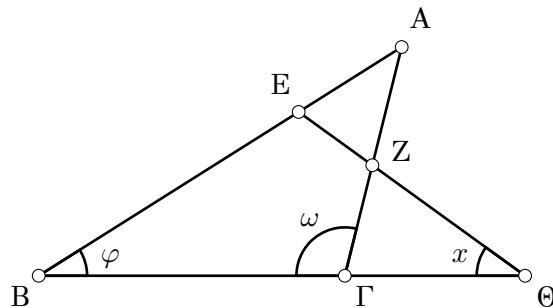
B. 30

Γ. 31

Δ. 60

E. 62

- 20.** Τα ευθύγραμμα τμήματα AE και EZ τέμνονται στο Z , έτσι ώστε $AE = AZ$. Οι γωνίες $\angle ABE$, $\angle AGB$ και $\angle EOB$ είναι ίσες με φ, ω και x , αντίστοιχα.



Η εξίσωση που δίνει το x , συναρτήσει των φ, ω και x , είναι η:

A. $x = \omega - \varphi$

B. $x = 180^\circ - \omega - \varphi$

Γ. $x = \omega + \varphi - 90^\circ$

Δ. $x = \omega - \frac{\varphi}{2}$

E. $x = \frac{\omega - \varphi}{2}$

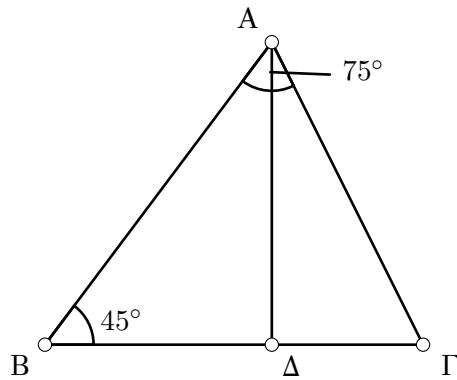
21. Δίνονται πραγματικοί αριθμοί a, β , τέτοιοι ώστε $a > 1 > \beta > 0$. Αν τοποθετήσουμε τους αριθμούς

$$\frac{a}{\beta}, \quad \frac{\beta}{a}, \quad \frac{a+1}{\beta}, \quad \frac{\beta+1}{a+1} \quad \text{και} \quad \frac{a+1}{\beta+1}$$

στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο, ο μεσαίος αριθμός θα είναι ο:

- A. $\frac{a}{\beta}$ B. $\frac{\beta}{a}$ C. $\frac{a+1}{\beta}$ D. $\frac{\beta+1}{a+1}$ E. $\frac{a+1}{\beta+1}$

22. Στο πιο κάτω σχήμα, η AD είναι κάθετη στη BG . Επίσης, $\angle ABG = 45^\circ$, $\angle BAG = 75^\circ$ και $GD = 1$ cm.



Η περίμετρος του τριγώνου BCD εσούται με:

- A. $(3 + \sqrt{3} + \sqrt{6})$ cm B. $\left(3 + \frac{\sqrt{3} + \sqrt{6}}{3}\right)$ cm C. $(1 + 2\sqrt{3} + \sqrt{6})$ cm
 D. $\left(1 + 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ cm E. $\left(1 + \sqrt{6} + \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$ cm

23. Δίνεται η ακολουθία

$$2, \quad 1 + \frac{1}{2}, \quad 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}, \quad 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}, \quad \dots$$

Αν γράψουμε τον δέκατο όρο της ακολουθίας ως ανάγωγο κλάσμα στη μορφή $\frac{a}{\beta}$, τότε το άθροισμα των ψηφίων του a εσούται με:

- A. 8 B. 9 C. 10 D. 12 E. 17

24. Ο Γιώργος έγραψε όλους τους αριθμούς από το 1 ως το 2022 στην σειρά, όπως πιο κάτω:

1234567891011... 2022

Το άθροισμα των ψηφίων που βρίσκονται στις θέσεις 2020, 2021 και 2022 ισούται με:

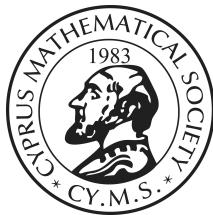
- A. 7 B. 8 C. 9 D. 10 E. 15

25. Το πλήθος των τετραψήφιων τέλειων τετραγώνων που λήγουν σε 9 είναι ίσο με:

- A. 7 B. 8 C. 13 D. 14 E. 15

**CYPRUS MATHEMATICAL
OLYMPIAD 2022**

ENGLISH VERSION



Cyprus Mathematical Society
36 Stasinou street, Off. 102, 2003 Strovolos, Nicosia
Tel: 357 – 22378101, Fax: 357 – 22379122
cms@cms.org.cy, www.cms.org.cy

23rd CYPRUS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Sunday, April 10, 2022

EXAM PAPER 9th & 10th GRADE

TIME: 60 minutes

- Fill in carefully the answer sheet, by choosing only one answer to each question. The selection must be made by shading the right answer.
- Every correct answer is graded with 4 points. For each wrong answer, 1 point will be deducted.
- If a question is answered by shading more than one answer, the answer will be considered wrong. The correction will be made electronically, so any additional mark might be taken as wrong.
- You can use the space next to the questions to take extra notes.
- It is recommended that you complete the answer sheet in the last five minutes of the exam, making sure that your answers are final.

Examples of filling the answer sheet

1. Find the result $2 + 3$.

A. 6

B. 5

Γ. 4

Δ. 3

Ε. 2

Correct filling

1. A B Γ Δ E

1. A B Γ Δ E

1. A B Γ Δ E

Incorrect filling

1. A B Γ Δ E

1. A B Γ Δ E

1. A B Γ Δ E

1. If

$$\frac{a + \beta}{a - \beta} = 3,$$

then the value of the expression

$$\frac{a}{\beta}$$

is equal to:

- A. 2 B. 3 $\Gamma.$ $\frac{1}{2}$ $\Delta.$ 1 E. -1

2. If

$$f(x) = ax + \beta$$

with

$$f(1) = 5 \quad \text{and} \quad f(2) = 9,$$

then the value of the expression

$$a^2 + \beta^2$$

is equal to:

- A. 13 B. 14 $\Gamma.$ 17 $\Delta.$ 25 E. 106

3. If

$$(a + \beta)^2 = 25 \quad \text{and} \quad (a - \beta)^2 = 17,$$

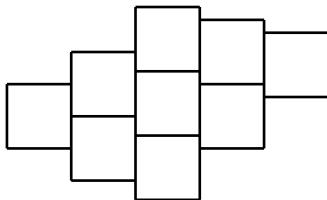
then the value of the expression

$$a\beta$$

is equal to:

- A. $\frac{5 + \sqrt{17}}{4}$ B. $5 - \sqrt{17}$ $\Gamma.$ 1 $\Delta.$ 2 E. 4

4. The figure below consists of squares of side length 1 cm. The perimeter of the figure is equal to:

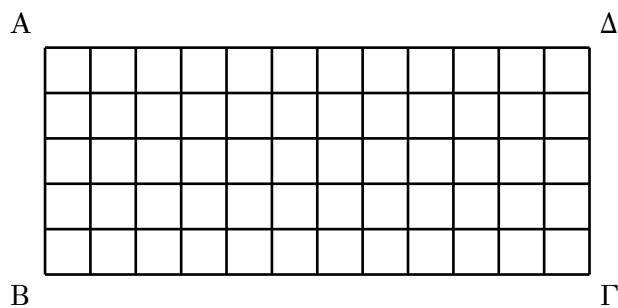


- A. 14 cm B. 15 cm $\Gamma.$ 16 cm
 $\Delta.$ 17 cm E. Cannot be determined

5. Last year, in Marias' school, 315 out of the 600 students were girls. This year, the number of students in the school increased by 40 students. The percentage of girls remained the same as last year. The number of girls in the school this year is:

- A. 335 B. 336 C. 337 D. 338 E. 339

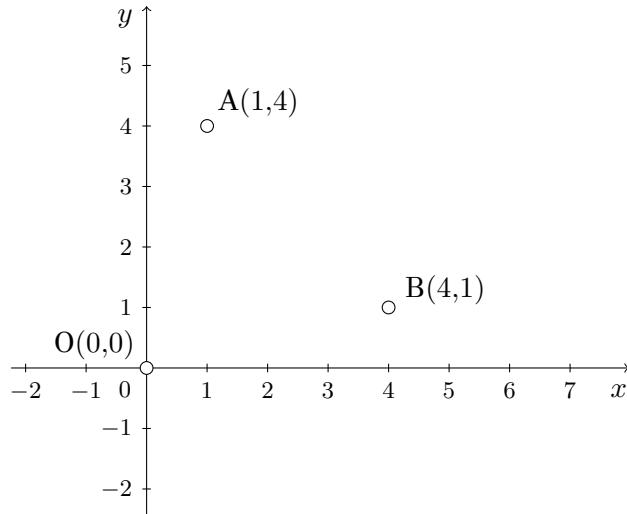
6. The following rectangle was divided into 60 equal squares with diagonal of 2 cm each.



The length of the diagonal $B\Delta$ is equal to:

- A. 13 cm B. 26 cm C. $5\sqrt{2}$ cm D. $12\sqrt{2}$ cm E. $13\sqrt{2}$ cm

7. The points $O(0,0)$, $A(1,4)$, $B(4,1)$, of the following figure are vertices of a parallelogram.



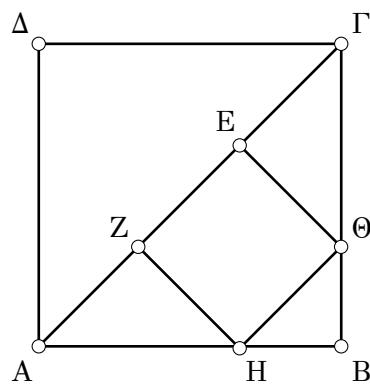
The area of the parallelogram is equal to:

- A. 12 B. 15 C. 16 D. 17 E. 19

8. If we increase the length of a rectangle by 25% and reduce its width by $x\%$, then its area is increased by 20%. The value of x is equal to:

- A. 4
- B. $4\frac{1}{3}$
- C. $4\frac{1}{2}$
- D. 5
- E. It depends on the dimensions of the rectangle

9. In the figure below, $AB\Gamma\Delta$ and $EZH\Theta$ are squares.



If $AB = 1$ cm, then the area of the square $EZH\Theta$ is equal to:

- A. $\frac{2}{9} \text{ cm}^2$
- B. $\frac{1}{8} \text{ cm}^2$
- C. $\frac{1}{4} \text{ cm}^2$
- D. $\frac{2}{5} \text{ cm}^2$
- E. $\frac{1}{3} \text{ cm}^2$

10. The largest integer value of x , for which

$$3^{20} > 32^x,$$

is:

- A. 3
- B. 4
- C. 5
- D. 6
- E. 7

11. If the number

$$\overline{1\omega 2} + \overline{\omega 3} - 7\omega + 12$$

is a perfect square, then the value of ω is:

(With $\overline{a\beta\gamma}$ we represent the three-digit number where its hundreds digit is a , its tens digit is β , and its units digit is γ .)

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4
- E. 5

12. In a right-angled triangle, the median lines from its acute-angled vertices have lengths 5 cm and $\sqrt{50}$ cm. The length of its hypotenuse is equal to:

- A. $(4 + \sqrt{15})$ cm B. $\sqrt{15}$ cm C. $2\sqrt{15}$ cm
D. 60 cm E. $(4 + 2\sqrt{15})$ cm

13. The number

$$63 + 2 \cdot 63 + 3 \cdot 63 + \cdots + 48 \cdot 63$$

is equal to a^3 . The value of a is:

- A. 41 B. 42 C. 43 D. 52 E. 53

14. If $x < -1$, then out of the following statements, the one that holds is:

- A. $x < x^2 < x^3$ B. $x < x^3 < x^2$ C. $x^2 < x^3 < x$
D. $x^3 < x^2 < x$ E. $x^3 < x < x^2$

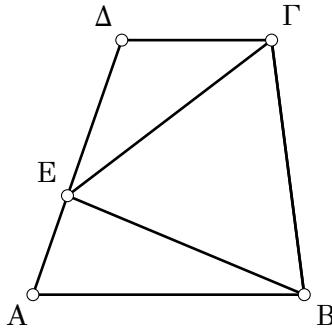
15. The number of different prime divisors of

$$2^{2022} + 4^{1010} + 8^{675}$$

is:

- A. 1 B. 2 C. 3
D. 4 E. At least 5

16. In the figure below, let $AB\Gamma\Delta$ be a trapezium with $AB \parallel \Gamma\Delta$ and let E be a point on the side $A\Delta$, such that the triangle $\triangle BE\Gamma$ is equilateral and the triangles $\triangle ABE$ and $\triangle \Gamma\Delta E$ are isosceles, with $AB = BE$ and $\Gamma\Delta = \Delta E$.



The angle $\angle BAE$ is equal to:

- A. 50° B. 60° C. 65° D. 70° E. 80°

17. Let

$$N = 3x + 4y + 5\omega,$$

where x is equal to 1 or -1 , y is equal to 1 or -1 and ω is equal to 1 or -1 . The number of the following statements, which are correct is:

- (a) N can be equal to 0.
- (b) N is always odd.
- (c) N cannot be equal to 4.
- (d) N is always even.

A. 0

B. 1

Γ. 2

Δ. 3

E. 4

18. The number of positive integers from 1 to 150 inclusive, which are divisible by at least two of 3, 5 and 7 is:

A. 12

B. 15

Γ. 19

Δ. 20

E. 21

19. Out of the following numbers, the one which divides

$$30^{2021} + 63^{2022}$$

is:

A. 7

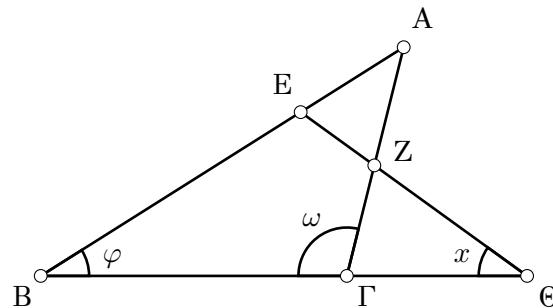
B. 30

Γ. 31

Δ. 60

E. 62

20. The line segments AG and $E\Theta$ intersect at Z , such that $AE = AZ$. The angles $\angle ABG$, $\angle AGB$ and $\angle E\Theta B$ are equal to φ , ω and x , respectively.



The equation of x , with respect to φ and ω , is:

A. $x = \omega - \varphi$

B. $x = 180^\circ - \omega - \varphi$

Γ. $x = \omega + \varphi - 90^\circ$

Δ. $x = \omega - \frac{\varphi}{2}$

E. $x = \frac{\omega - \varphi}{2}$

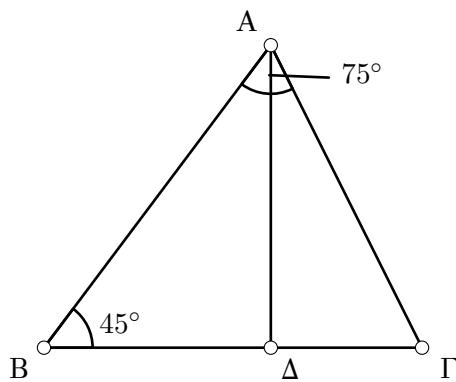
21. Let a, β be real numbers, such that $a > 1 > \beta > 0$. If we order the numbers

$$\frac{a}{\beta}, \frac{\beta}{a}, \frac{a+1}{\beta}, \frac{\beta+1}{a+1} \quad \text{and} \quad \frac{a+1}{\beta+1}$$

in ascending order, the number in the middle is:

- A. $\frac{a}{\beta}$ B. $\frac{\beta}{a}$ C. $\frac{a+1}{\beta}$ D. $\frac{\beta+1}{a+1}$ E. $\frac{a+1}{\beta+1}$

22. In the figure below, $A\Delta$ is perpendicular to $B\Gamma$. Furthermore, $\angle AB\Gamma = 45^\circ$, $\angle BAG = 75^\circ$ and $\Gamma\Delta = 1$ cm.



The perimeter of the triangle is equal to:

- A. $(3 + \sqrt{3} + \sqrt{6})$ cm B. $\left(3 + \frac{\sqrt{3} + \sqrt{6}}{3}\right)$ cm C. $(1 + 2\sqrt{3} + \sqrt{6})$ cm
 D. $\left(1 + 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ cm E. $\left(1 + \sqrt{6} + \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$ cm

23. Consider the sequence

$$2, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}, 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}, \dots$$

If we write its tenth term as a fraction $\frac{a}{\beta}$ in its simplest form, then the sum of the digits of a is equal to:

- A. 8 B. 9 C. 10 D. 12 E. 17

24. George wrote all integers from 1 to 2022 in a sequence as follows:

1234567891011...2022

The sum of the digits which can be found in positions 2020, 2021 and 2022 is equal to:

- A. 7 B. 8 Γ. 9 Δ. 10 E. 15

25. The number of four-digit perfect squares whose units digit is 9 is equal to:

- A. 7 B. 8 Γ. 13 Δ. 14 E. 15

