ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 15/12/07 *Ώρα εξέτασης: 09:30 -12:30*

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα .Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
2. Να γράφετε με μπλέ ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΘΕΜΑΤΑ

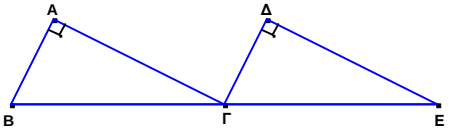
1. Αν x, y, α πραγματικοί αριθμοί με $x+y=4\alpha$, να αποδείξετε ότι

$$x\left(\frac{y-\alpha}{2}\right)^2+y\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)^2=\alpha^3.$$

2. Αν α, β, γ πραγματικοί αριθμοί με $\alpha\beta\gamma=1$, να αποδείξετε ότι

$$\frac{\alpha}{\alpha\beta+\alpha+1}+\frac{\beta}{\beta\gamma+\beta+1}+\frac{\gamma}{\gamma\alpha+\gamma+1}=1.$$

3. Στο σχήμα τα σημεία Β,Γ,Ε είναι συνευθειακά, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΓΕ είναι ορθογώνια, έχουν ίσες τις υποτείνουσες ΒΓ, ΓΕ και ίσα τα ύψη προς τις υποτείνουσες. Να αποδείξετε ότι:



α) $\square$ΑΒΓ $=\square$ΔΓΕ

β) το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΔΕΒ είναι τριπλάσιο από το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

4. Ένας αγοραστής μέτρησε το μήκος λάστιχου που χρειαζόταν για τον κήπο του και έγραψε το μήκος σε ένα χαρτί (π.χ. χ μέτρα και ψ εκατοστά). Ο πωλητής έκανε λάθος και του έδωσε ψ μέτρα και χ εκατοστά. Όταν ο αγοραστής χρησιμοποίησε 3,5 μέτρα, διαπίστωσε ότι είχε στη διάθεσή του ακόμα διπλάσιο μήκος λάστιχου από αυτό που έγραψε αρχικά στο χαρτί. Να βρείτε το πραγματικό μήκος του λάστιχου που παρήγγειλε ο αγοραστής.

5. Έστω $K=\sqrt{\frac{49}{2}+\sqrt{\frac{2401}{4}-n}}+\sqrt{\frac{49}{2}-\sqrt{\frac{2401}{4}-n}}$, όπου $n\in N$.

α) Να αποδείξετε ότι $K=\sqrt{49+2\sqrt{n}}$

β) Να βρείτε όλους τους ακέραιους αριθμούς n , για τους οποίους η παράσταση K είναι ακέραιος αριθμός.

	ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ ***ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ*** ***Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ*** *Ημερομηνία: 15/12/07* *Ώρα εξέτασης: 09:30 -12:30*

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα .Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΘΕΜΑΤΑ

1. Να βρείτε όλους τους ακεραίους k για τους οποίους η παράσταση $k^2-19k+91$ είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

2. Έστω $K=\sqrt{\frac{49}{2}+\sqrt{\frac{2401}{4}-n}}+\sqrt{\frac{49}{2}-\sqrt{\frac{2401}{4}-n}}$, όπου $n\in N$.

α) Να αποδείξετε ότι $K=\sqrt{49+2\sqrt{n}}$

β) Να βρείτε όλους τους ακέραιους αριθμούς n , για τους οποίους η παράσταση K είναι ακέραιος αριθμός.

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ . Η μεσοκάθετος της πλευράς ΑΒ τέμνει την ΑΓ στο σημείο Η και η μεσοκάθετος της πλευράς ΑΓ τέμνει την ΑΒ στο σημείο Ζ. Αν η παράλληλη από το Η προς την ΑΒ τέμνει τη μεσοκάθετο της πλευράς ΒΓ στο σημείο Θ, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΗΘΖ είναι παραλληλόγραμμο.

4. Για τη συνάρτηση $f:N^*\to R_+^*$ ισχύει

$$f^2(1)+f^2(2)+...+f^2(n)=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}\ ,\ \forall n\in N^*.$$

Να αποδείξετε ότι $f(1)+f(2)+...+f(n)=n^2$, $\forall n\in N^*$.

5. Το άθροισμα 161 φυσικών αριθμών είναι 2007.
Να βρείτε τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή των μέγιστων κοινών διαιρετών τους.

	ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ ***ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ*** ***Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ*** *Ημερομηνία: 15/12/07* *Ώρα εξέτασης: 09:30 -12:30*

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα .Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
2. Να γράφετε με μπλέ ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΘΕΜΑΤΑ

1. Για την ακολουθία πραγματικών αριθμών $(\alpha_n)_{n\in N^*}$ είναι $\alpha_n > 0$, $\forall n \in N^*$ και ισχύει

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ... + \alpha_n^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3} \text{ , } \forall n \in N^*.$$

Να αποδείξετε ότι $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = n^2$, $\forall n \in N^*$.

2. Το άθροισμα 161 φυσικών αριθμών είναι 2007.
Να βρείτε τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή των μέγιστων κοινών διαιρετών τους.

3. Να βρείτε τη συνάρτηση $f : R \to R$ για την οποία γνωρίζουμε ότι είναι συνεχής στο 0 με $f(0) = 2$ και ισχύει $f(x) - 2f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x}{4}\right) = x^2$, $\forall x \in R$.

4. Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ φέρουμε τις διαγωνίους ΑΓ, ΒΔ και την ΒΕ κάθετη στην ΑΓ (Ε σημείο της ΑΓ). Αν η διχοτόμος της γωνίας ΔΒΕ τέμνει την ΑΓ στο Μ και την ΔΓ στο Ζ και η κάθετος από το Γ στην ΒΖ τέμνει τη ΒΖ στο Ν και την ΒΔ στο Κ, να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΕΝ και ΜΚ τέμνονται πάνω στην ΑΒ.

5. Παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ καλύπτεται από τρίγωνο ΚΛΜ.
Να αποδείξετε ότι $\text{Εμβ}(\text{ΑΒΓΔ}) \le \frac{1}{2}\text{Εμβ}(\text{ΚΛΜ})$.

	ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ ***ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ*** ***ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2007*** ***Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ***

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1. Αν x, y, α πραγματικοί αριθμοί με $x+y=4\alpha$, να αποδείξετε ότι

$$x\left(\frac{y-\alpha}{2}\right)^2+y\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)^2=\alpha^3.$$

ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned}
x\left(\frac{y-\alpha}{2}\right)^2+y\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)^2 &= \frac{1}{4}\left[x\left(y-\alpha\right)^2+y\left(x-\alpha\right)^2\right]\\
&= \frac{1}{4}\left(xy^2-2\alpha xy+x\alpha^2+yx^2-2\alpha xy+y\alpha^2\right)\\
&= \frac{1}{4}\left[xy\left(y+x\right)+\alpha^2\left(x+y\right)-4\alpha xy\right]\\
&= \frac{1}{4}\left(4\alpha xy+4\alpha^3-4\alpha xy\right)\\
&= \frac{1}{4}4\alpha^3\\
&= \alpha^3
\end{aligned}$$

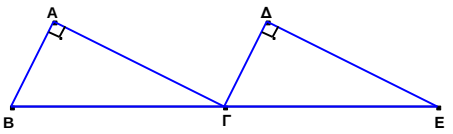
2. Αν α, β, γ πραγματικοί αριθμοί με $\alpha\beta\gamma = 1$, να αποδείξετε ότι

$$\frac{\alpha}{\alpha\beta+\alpha+1}+\frac{\beta}{\beta\gamma+\beta+1}+\frac{\gamma}{\gamma\alpha+\gamma+1}=1.$$

<u>ΛΥΣΗ</u>

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{\alpha\beta+\alpha+1}+\frac{\beta}{\beta\gamma+\beta+1}+\frac{\gamma}{\gamma\alpha+\gamma+1} &= \frac{\alpha}{\alpha\beta+\alpha+\alpha\beta\gamma}+\frac{\beta}{\beta\gamma+\beta+1}+\frac{\gamma}{\gamma\alpha+\gamma+1} \\
&= \frac{1}{\beta+1+\beta\gamma}+\frac{\beta}{\beta\gamma+\beta+1}+\frac{\gamma}{\gamma\alpha+\gamma+1} \\
&= \frac{\beta+1}{\beta\gamma+\beta+1}+\frac{\gamma}{\gamma\alpha+\gamma+1} \\
&= \frac{\beta+1}{\beta\gamma+\beta+\alpha\beta\gamma}+\frac{\gamma}{\gamma\alpha+\gamma+1} \\
&= \frac{\beta+1}{\beta(\gamma\alpha+\gamma+1)}+\frac{\gamma}{\gamma\alpha+\gamma+1} \\
&= \frac{\beta+1+\beta\gamma}{\beta(\gamma\alpha+\gamma+1)} \\
&= \frac{\beta\gamma+\beta+1}{\alpha\beta\gamma+\beta\gamma+\beta} \\
&= \frac{\beta\gamma+\beta+1}{1+\beta\gamma+\beta} \\
&= 1
\end{aligned}$$

3. Στο σχήμα τα σημεία Β,Γ,Ε είναι

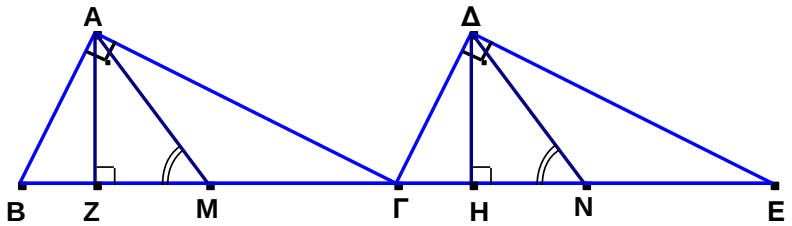


συνευθειακά, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΓΕ
είναι ορθογώνια, έχουν ίσες τις
υποτείνουσες ΒΓ, ΓΕ και ίσα τα ύψη
προς τις υποτείνουσες. Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΒΓ = ΔΓΕ

β) το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΔΕΒ είναι τριπλάσιο από το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

<u>ΛΥΣΗ</u>



α) Φέρουμε τις διαμέσους ΑΜ, ΔΝ των ορθογωνίων τριγώνων ΑΒΓ, ΓΔΕ αντίστοιχα Τότε ΑΜ= ΔΝ= ΜΒ= ΜΓ= ΝΓ= ΝΕ και τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΖΜ, ΔΗΝ είναι ίσα, από όπου $\angle AMB = \angle \Delta N\Gamma$ και άρα τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΜΒ, ΔΝΓ είναι ίσα. Συνεπώς ΑΒ=ΔΓ και τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΓΕ είναι ίσα.

β) Επειδή $\angle AB\Gamma = \angle \Delta\Gamma N$, είναι ΑΒ//ΔΓ και αφού ΑΒ=ΔΓ, το ΑΔΓΒ είναι παραλληλόγραμμο. Τότε (ΑΓΔ)=(ΑΒΓ)=(ΓΔΕ)=ε και συνεπώς (ΑΔΕΒ)=3^{ε}.

4. Κάποιος μέτρησε το μήκος λάστιχου που χρειαζόταν για τον κήπο του και έγραψε το μήκος σε ένα χαρτί (π.χ. χ μέτρα και ψ εκατοστά). Ο πωλητής έκανε λάθος και του

έδωσε ψ μέτρα και χ εκατοστά. Όταν ο αγοραστής ξόδεψε 3,5 μέτρα, διαπίστωσε ότι είχε στη διάθεσή του ακόμα διπλάσιο μήκος λάστιχου από αυτό που έγραψε αρχικά στο χαρτί. Να βρείτε το πραγματικό μήκος του λάστιχου που παρήγγειλε.

<u>ΛΥΣΗ</u>

Έστω ότι ο αγοραστής παρήγγειλε χ μέτρα και ψ εκατοστά, δηλαδή $(100\chi+\psi)$ εκατοστά. Σύμφωνα με το πρόβλημα, έχουμε

$$100\psi+\chi-350=2(100\chi+\psi)\Leftrightarrow 100(-2\chi+\psi-3)=-\chi+2\psi+50$$

$$\Leftrightarrow 100\kappa=-\chi+2\psi+50:(1)$$

όπου $-2\chi+\psi-3=\kappa:(2)$, με κ ακέραιο.

Όμως $\left.\begin{matrix}0\le\chi\le 99\\ 0\le\psi\le 99\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}-99\le-\chi\le 0\\ 0\le 2\psi\le 198\end{matrix}\right\}\Rightarrow -49\le-\chi+2\psi+50\le 248$

$$\Rightarrow -49\le 100\kappa\le 248\Rightarrow -0,49\le\kappa\le 2,48$$

και αφού κ ακέραιος, $\kappa\in\{0,1,2\}$.

Από τις (1) και (2) έχουμε:

- Για $\kappa=0$: $\begin{cases}-\chi+2\psi+50=0\\ -2\chi+\psi-3=0\end{cases}$, που δε δίνει ακέραιες λύσεις.
- Για $\kappa=1$: $\begin{cases}-\chi+2\psi+50=100\\ -2\chi+\psi-3=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\chi+2\psi=50\\ -2\chi+\psi=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\chi=14\\ \psi=32\end{cases}$
- Για $\kappa=2$: $\begin{cases}-\chi+2\psi+50=200\\ -2\chi+\psi-3=2\end{cases}$, που δε δίνει ακέραιες λύσεις.

Άρα παρήγγειλε 14 μέτρα και 32 εκατοστά.

5. Έστω $K=\sqrt{\frac{49}{2}+\sqrt{\frac{2401}{4}-n}}+\sqrt{\frac{49}{2}-\sqrt{\frac{2401}{4}-n}}$, όπου $n\in N$.

α) Να αποδείξετε ότι $K=\sqrt{49+2\sqrt{n}}$

β) Να βρείτε όλους τους ακέραιους αριθμούς n , για τους οποίους η παράσταση K είναι ακέραιος αριθμός.

<u>ΛΥΣΗ</u>

Καταρχήν πρέπει $\frac{2401}{4}-n\geq 0 \Leftrightarrow 0\leq n\leq 600 : (1)$

α) $K^2=49+2\sqrt{\left(\frac{49}{2}\right)^2-\left(\frac{2401}{4}-n\right)} \Leftrightarrow K^2=49+2\sqrt{n} \Leftrightarrow K=\sqrt{49+2\sqrt{n}}\ \ (K>0)$.

β) $K=\sqrt{49+2\sqrt{n}} \Leftrightarrow n=\left(\frac{K^2-49}{2}\right)^2$, οπότε από την (1) έχουμε

$$0\leq\left(\frac{K^2-49}{2}\right)^2\leq 600 \Leftrightarrow 49\leq K^2\leq 49+20\sqrt{6} \Leftrightarrow 7\leq K\leq\sqrt{49+20\sqrt{6}}\ .$$

Για να είναι ο K ακέραιος, πρέπει $K\in\{7,8,9\}$ και αφού $n=\left(\frac{K^2-49}{2}\right)^2$

$n=0$ ή $n=256$.

	ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ ***ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ*** ***ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2007*** ***Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ***

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1. Να βρείτε όλους τους ακεραίους k για τους οποίους η παράσταση $k^2-19k+91$ είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

ΛΥΣΗ

Έστω $k^2-19k+91=m^2$, για κάποιο $m\in Z$. Τότε

$$4k^2-4\cdot 19k+364=4m^2 \Leftrightarrow (2k-19)^2+3=(2m)^2$$

$$\Leftrightarrow (2m-2k+19)(2m+2k-19)=3$$

από όπου έχουμε τις περιπτώσεις:

- $\begin{cases}2m-2k+19=1\\2m+2k-19=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=1\\k=10\end{cases}$

- $\begin{cases}2m-2k+19=3\\2m+2k-19=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=1\\k=9\end{cases}$

- $\begin{cases}2m-2k+19=-1\\2m+2k-19=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-1\\k=9\end{cases}$

- $\begin{cases}2m-2k+19=-3\\2m+2k-19=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-1\\k=10\end{cases}$

Άρα $k=9$ ή $k=10$.

2. Έστω $K=\sqrt{\frac{49}{2}+\sqrt{\frac{2401}{4}-n}}+\sqrt{\frac{49}{2}-\sqrt{\frac{2401}{4}-n}}$, όπου $n\in N$.

α) Να αποδείξετε ότι $K=\sqrt{49+2\sqrt{n}}$

β) Να βρείτε όλους τους ακέραιους αριθμούς n , για τους οποίους η παράσταση K είναι ακέραιος αριθμός.

<u>ΛΥΣΗ</u>

Καταρχήν πρέπει $\frac{2401}{4}-n\geq 0\Leftrightarrow 0\leq n\leq 600:(1)$

α) $K^2=49+2\sqrt{\left(\frac{49}{2}\right)^2-\left(\frac{2401}{4}-n\right)}\Leftrightarrow K^2=49+2\sqrt{n}\Leftrightarrow K=\sqrt{49+2\sqrt{n}}\ \ (K>0)$.

β) $K=\sqrt{49+2\sqrt{n}}\Leftrightarrow n=\left(\frac{K^2-49}{2}\right)^2$, οπότε από την (1) έχουμε

$$0\leq\left(\frac{K^2-49}{2}\right)^2\leq 600\Leftrightarrow 49\leq K^2\leq 49+20\sqrt{6}\Leftrightarrow 7\leq K\leq\sqrt{49+20\sqrt{6}}\ .$$

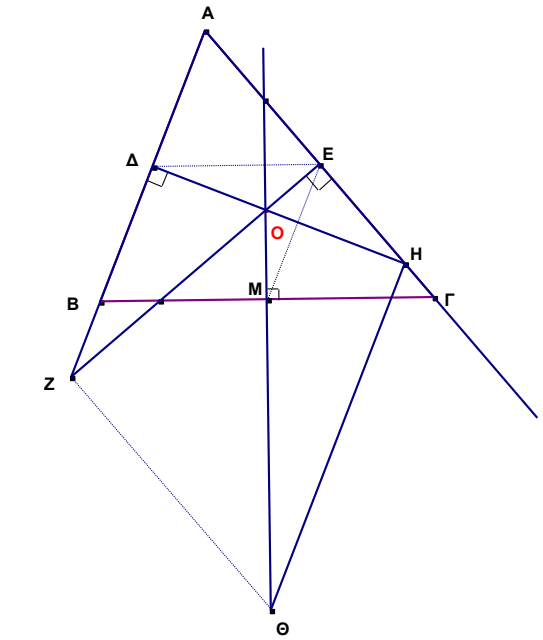
Για να είναι ο K ακέραιος, πρέπει $K\in\{7,8,9\}$ και αφού $n=\left(\frac{K^2-49}{2}\right)^2$

$n=0$ ή $n=256$.

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ . Η μεσοκάθετος της πλευράς ΑΒ τέμνει την ΑΓ στο σημείο

Η και η μεσοκάθετος της πλευράς ΑΓ τέμνει την ΑΒ στο σημείο Ζ. Αν η παράλληλη από το Η προς την ΑΒ τέμνει τη μεσοκάθετο της πλευράς ΒΓ στο σημείο Θ, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΗΘΖ είναι παραλληλόγραμμο.

<u>ΛΥΣΗ</u>



4. Για τη συνάρτηση $f : N^* \to R_+^*$ ισχύει

$$f^2(1)+f^2(2)+...+f^2(n)=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}\ ,\ \forall n\in N^*.$$

Να αποδείξετε ότι $f(1)+f(2)+...+f(n)=n^2\ ,\ \forall n\in N^*.$

<u>ΛΥΣΗ</u>

Είναι $\forall n\in N^*$,

$$\begin{aligned}
f^2(n)&=\left[f^2(1)+f^2(2)+...+f^2(n-1)+f^2(n)\right]-\left[f^2(1)+f^2(2)+...+f^2(n-1)\right]\\
&=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}-\frac{(n-1)(2n-3)(2n-1)}{3}\\
&=\frac{(2n-1)\left[n(2n+1)-(n-1)(2n-3)\right]}{3}\\
&=\frac{(2n-1)(6n-3)}{3}\\
&=(2n-1)^2
\end{aligned}$$

Άρα και αφού $f(n)>0\ ,\ \forall n\in N^*$, είναι $f(n)=2n-1,\ \forall n\in N^*$.

Έτσι, διαδοχικά έχουμε:

$f(1)=2\cdot 1-1$, $f(2)=2\cdot 2-1$,..., $f(n)=2n-1$ και προσθέτοντας παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
f(1)+f(2)+...+f(n)&=2(1+2+...+n)-n\\
&=2\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n\\
&=n^2+n-n\\
&=n^2
\end{aligned}$$

5. Το άθροισμα 161 φυσικών αριθμών είναι 2007.
Να βρείτε τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή των μέγιστων κοινών διαιρετών τους.

<u>ΛΥΣΗ</u>

Έστω $\alpha_i, i=1,2,3,...,161$ οι αριθμοί και d ο ΜΚΔ τους.

Τότε $d/2007$ και d/α_i , $\forall i=1,2,3,...,161$.

Άρα $d \le \alpha_i$, $\forall i=1,2,3,...,161$. Έχουμε

$$2007=\sum_{i=1}^{161}\alpha_i \ge 161d \Rightarrow d \le \frac{2007}{161} < 13.$$

Οι μόνοι διαιρέτες του 2007 που είναι μικρότεροι του 13 είναι 1,3,9 και άρα $d=9$.

Πράγματι, το 2007 γράφεται $2007=\underbrace{9+9+...+9}_{160\ \phi o\rho\acute{\varepsilon}\varsigma}+567$.

	ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ ***ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ*** ***ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2007*** ***Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ***

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1. Για την ακολουθία πραγματικών αριθμών $(\alpha_n)_{n\in N^*}$ είναι $\alpha_n > 0$, $\forall n \in N^*$ και ισχύει

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ... + \alpha_n^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3} \text{ , } \forall n \in N^*.$$

Να αποδείξετε ότι $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = n^2$, $\forall n \in N^*$.

ΛΥΣΗ

Είναι $\forall n \in N^*$,

$$\begin{aligned}
\alpha_n^2 &= \left[\alpha_1^2 + \alpha_1^2 + ... + \alpha_{n-1}^2 + \alpha_n^2\right] - \left[\alpha_1^2 + \alpha_1^2 + ... + \alpha_{n-1}^2\right] \\
&= \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3} - \frac{(n-1)(2n-3)(2n-1)}{3} \\
&= \frac{(2n-1)\left[n(2n+1) - (n-1)(2n-3)\right]}{3} \\
&= \frac{(2n-1)(6n-3)}{3} \\
&= (2n-1)^2
\end{aligned}$$

Άρα και αφού $\alpha_n > 0$, $\forall n \in N^*$, είναι $\alpha_n = 2n-1, \forall n \in N^*$.

Έτσι, διαδοχικά έχουμε:

$\alpha_1 = 2\cdot 1 - 1$, $\alpha_2 = 2\cdot 2 - 1$,..., $\alpha_n = 2n-1$ και προσθέτοντας παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n &= 2(1 + 2 + ... + n) - n \\
&= 2\cdot\frac{n(n+1)}{2} - n \\
&= n^2 + n - n \\
&= n^2
\end{aligned}$$

2. Το άθροισμα 161 φυσικών αριθμών είναι 2007.
Να βρείτε τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή των μέγιστων κοινών διαιρετών τους.

<u>ΛΥΣΗ</u>

Έστω $\alpha_i, i = 1, 2, 3, ..., 161$ οι αριθμοί και d ο ΜΚΔ τους.

Τότε $d / 2007$ και d / α_i , $\forall i = 1, 2, 3, ..., 161$.

Άρα $d \le \alpha_i$, $\forall i = 1, 2, 3, ..., 161$. Έχουμε

$$2007 = \sum_{i=1}^{161} \alpha_i \ge 161d \Rightarrow d \le \frac{2007}{161} < 13.$$

Οι μόνοι διαιρέτες του 2007 που είναι μικρότεροι του 13 είναι 1,3,9 και άρα $d = 9$.

Πράγματι, το 2007 γράφεται $2007 = \underbrace{9 + 9 + ... + 9}_{160\ \phi o \rho \acute{\varepsilon} \varsigma} + 567$.

3. Να βρείτε τη συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία γνωρίζουμε ότι είναι συνεχής στο 0 με $f(0)=2$ και ισχύει $f(x)-2f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x}{4}\right)=x^2$, $\forall x\in R:(*)$.

<u>ΛΥΣΗ</u>

Έστω ότι υπάρχει τέτοια συνάρτηση f .

Θέτω $g(x)=f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)$, $\forall x\in R$.

Η g είναι συνεχής στο 0 και $g(0)=f(0)-f(0)=0$.

$$(*)\Leftrightarrow f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)-\left[f\left(\frac{x}{2}\right)-f\left(\frac{x}{4}\right)\right]=x^2 \Leftrightarrow g(x)-g\left(\frac{x}{2}\right)=x^2 \text{ , } \forall x\in R$$

Άρα διαδοχικά έχουμε:

$$g(x)-g\left(\frac{x}{2}\right)=x^2$$

$$g\left(\frac{x}{2}\right)-g\left(\frac{x}{4}\right)=\frac{x^2}{4}$$

$$g\left(\frac{x}{4}\right)-g\left(\frac{x}{8}\right)=\frac{x^2}{16}$$

$$\vdots$$

$$g\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)-g\left(\frac{x}{2^n}\right)=\frac{x^2}{2^{2(n-1)}}.$$

Με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε:

$$g(x)-g\left(\frac{x}{2^n}\right)=x^2\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+...+\frac{1}{2^{2(n-1)}}\right)$$

$$g(x)-g\left(\frac{x}{2^n}\right)=x^2\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{2n}}}{1-\frac{1}{4}}$$

$$g(x)-g\left(\frac{x}{2^n}\right)=\frac{4}{3}x^2\left(1-\frac{1}{2^{2n}}\right)$$

Επειδή η g είναι συνεχής στο 0 με $g(0)=0$, παίρνοντας όρια καθώς $n\to+\infty$ έχουμε

$g(x)=\frac{4x^2}{3}$, $\forall x\in R \Leftrightarrow f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{4x^2}{3}$, $\forall x\in R$, οπότε:

$$f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{4}{3}x^2$$

$$f\left(\frac{x}{2}\right)-f\left(\frac{x}{4}\right)=\frac{4}{3}\cdot\frac{x^2}{4}$$

$$f\left(\frac{x}{4}\right)-f\left(\frac{x}{8}\right)=\frac{4}{3}\cdot\frac{x^2}{16}$$

$$\vdots$$

$$f\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)-f\left(\frac{x}{2^n}\right)=\frac{4}{3}\cdot\frac{x^2}{2^{2(n-1)}}$$ και προσθέτοντας κατά μέλη, παίρνουμε

$$f(x)-f\left(\frac{x}{2^n}\right)=\frac{4}{3}x^2\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{2^{2(n-1)}}\right)$$

$$f(x)-f\left(\frac{x}{2^n}\right)=\frac{4}{3}x^2\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{2n}}}{1-\frac{1}{4}}$$

$$f(x)-f\left(\frac{x}{2^n}\right)=\frac{16}{9}x^2\left(1-\frac{1}{2^{2n}}\right)$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο 0 με $f(0)=2$, παίρνοντας όρια καθώς $n\to+\infty$ έχουμε

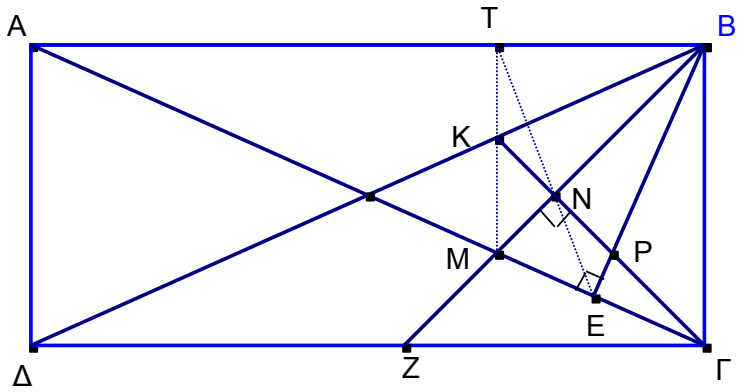
$$f(x)=2+\frac{16x^2}{9}\ ,\ \forall x\in R$$

4. Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ φέρουμε τις διαγωνίους ΑΓ, ΒΔ και την ΒΕ κάθετη στην ΑΓ

(Ε σημείο της ΑΓ). Αν η διχοτόμος της γωνίας ΔΒΕ τέμνει την ΑΓ στο Μ και την ΔΓ στο Ζ και η κάθετος από το Γ στην ΒΖ τέμνει τη ΒΖ στο Ν και την ΒΔ στο Κ, να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΕΝ και ΜΚ τέμνονται πάνω στην ΑΒ.

<u>ΛΥΣΗ</u>

.

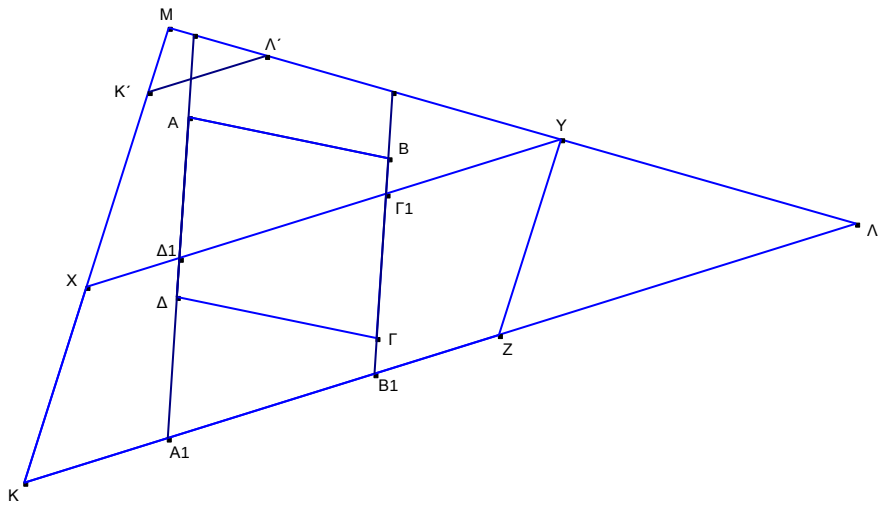


Ας είναι $\angle \Delta BZ = \angle ZBE = \theta$, $\angle NEB = \varphi$ και $\angle \Gamma BE = \omega$. Τότε
Από το εγγράψιμο τετράπλευρο ΒΝΕΓ είναι $\angle N\Gamma B = \varphi$ και $\angle N\Gamma E = \theta$.
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΝΓ έχουμε $\omega + \theta + \varphi = 90^0 : (1)$ και στο ισοσκελές τρίγωνο ΒΟΓ έχουμε $2\theta + \omega = \theta + \varphi \Leftrightarrow \theta + \omega = \varphi : (2)$. Από $(1),(2)$ προκύπτει $\varphi = 45^0$.
Έστω ότι η ΜΚ τέμνει την ΑΒ στο Τ. Επειδή $\angle KBM = \angle MBE = \angle N\Gamma M = \theta$, το ΒΚΜΓ είναι εγγράψιμο, άρα
$\angle KMB = \angle K\Gamma B = \angle MB\Gamma = 45^0 \Rightarrow MK // \Gamma B \Rightarrow MK \perp AB$.
Φέρουμε την ΤΝ και τότε από το εγγράψιμο ΤΚΝΒ έχουμε
$\angle KNT = \angle TBK = 45^0 - \theta : (3)$.
Αν Ρ το σημείο τομής των ΒΕ, ΓΝ τότε το Ρ είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΒΜΓ άρα ΜΡ//ΔΓ και $\angle PM\Gamma = \angle M\Gamma Z = 90^0 - (\varphi + \theta) = 45^0 - \theta$ και από το εγγράψιμο ΜΝΡΕ είναι $\angle PNE = \angle PME = 45^0 - \theta : (4)$.
Από $(3),(4) \Rightarrow \angle KNT = \angle PNE$, από όπου Τ, Ν, Ε είναι συνευθειακά, δηλαδή οι ευθείες ΜΚ, ΝΕ τέμνονται στο σημείο Τ της ΑΒ.

5. Παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ καλύπτεται από τρίγωνο ΚΛΜ.

Να αποδείξετε ότι $E\mu\beta(ΑΒΓΔ) \le \frac{1}{2} E\mu\beta(ΚΛΜ)$.

ΛΥΣΗ



Οι προεκτάσεις των ΑΔ, ΒΓ τέμνουν την πλευρά ΚΛ στα σημεία A_1, B_1 αντίστοιχα. Κατασκευάζουμε το παραλληλόγραμμο $A_1B_1Γ_1Δ_1$ ώστε να έχει το ίδιο εμβαδόν με το ΑΒΓΔ και τα $Δ_1$,$Γ_1$ να βρίσκονται στα ευθύγραμμα τμήματα A_1A και B_1B αντίστοιχα. Η ευθεία $Δ_1Γ_1$ τέμνει τις πλευρές ΚΜ, ΛΜ στα σημεία Χ, Υ αντίστοιχα και έστω ΥΖ//ΚΜ και έτσι το ΧΥΖΚ είναι παραλληλόγραμμο. Τότε
$(ΑΒΓΔ) = (A_1B_1Γ_1Δ_1) \le (ΧΥΖΚ)$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $(ΧΥΖΚ) \le \frac{1}{2}(ΚΛΜ)$.

- Αν $ΛΥ < \frac{1}{2}ΛΜ$, τότε το συμμετρικό Λ΄ του Λ ως προς το Υ βρίσκεται πάνω στην πλευρά ΛΜ και φέρουμε την Λ΄Κ΄ //ΛΚ. Στο τραπέζιο Λ΄Κ΄ΚΛ το ΧΥ είναι διάμεσος και άρα $(ΧΥΖΚ) = \frac{1}{2}(ΚΛΛ΄Κ΄) \le \frac{1}{2}(ΚΛΜ)$.
- Αν $ΛΥ > \frac{1}{2}ΛΜ$, τότε το συμμετρικό Λ΄ του Λ ως προς το Υ βρίσκεται στην προέκταση της πλευράς ΛΜ και παίρνοντας το συμμετρικό Μ΄ του Μ ως προς το Υ, αυτό βρίσκεται πάνω στην πλευρά ΜΛ. Φέρνουμε την Μ΄Κ΄//ΜΚ και εργαζόμαστε ομοίως με το τραπέζιο ΚΜΜ΄Κ΄.
- Αν τέλος το Υ είναι το μέσον πλευράς ΛΜ, τότε ισχύει η ισότητα.