



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2021
Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 18/12/2021 Ώρα Εξέτασης: 09:30-12:30

ΟΔΗΓΙΕΣ

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι.)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

Πρόβλημα 1. Να βρείτε όλα τα ορθογώνια τρίγωνα με ακέραια μήκη πλευρών τέτοια, ώστε το εμβαδόν και η περίμετρος τους να είναι αριθμητικά ίσα.

Λύση:

Έστω a, b οι κάθετες πλευρές του ορθογωνίου και c η υποτείνουσα. Τότε

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Το εμβαδόν του τριγώνου ισούται με $\frac{1}{2}ab$ και η περίμετρος με

$$a + b + c = a + b + \sqrt{a^2 + b^2}$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}ab &= a + b + \sqrt{a^2 + b^2} \implies ab = 2a + 2b + 2\sqrt{a^2 + b^2} \\ \implies ab - 2(a + b) &= 2\sqrt{a^2 + b^2} \\ \implies (ab - 2(a + b))^2 &= 4(a^2 + b^2) \\ \implies a^2b^2 - 4ab(a + b) + 4(a + b)^2 &= 4a^2 + 4b^2 \\ \implies a^2b^2 - 4ab(a + b) + 4a^2 + 8ab + 4b^2 &= 4a^2 + 4b^2 \\ \implies a^2b^2 - 4ab(a + b) + 8ab &= 0 \\ \implies ab(ab - 4(a + b) + 8) &= 0\end{aligned}$$

Αφού $ab \neq 0$ τότε

$$ab - 4a - 4b + 8 = 0 \implies (a - 4)(b - 4) = 8$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας είναι $a \geq b$. Οι μόνες λύσεις είναι οι $a - 4 = 8, b - 4 = 1$ και $a - 4 = 4, b - 4 = 2$ που δίνουν τα τρίγωνα $a = 12, b = 5, c = 13$ και $a = 8, b = 6, c = 10$.

Πρόβλημα 2. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$x + f(x) = f(f(x)) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- (α) Να δείξετε ότι η f είναι ένα προς ένα (1 - 1).
- (β) Να λύσετε την εξίσωση $f(f(x)) = 0$.

(γ) Να δώσετε παράδειγμα τέτοιας συνάρτησης f .

Λύση:

(α) Έχουμε

$$f(x) = f(y) \implies f(f(x)) = f(f(y)) \implies x + f(x) = y + f(y) \implies x = y$$

Άρα η f είναι 1 - 1.

(β) Για $x = 0$ έχουμε $f(f(0)) = f(0)$ και αφού η f είναι 1 - 1 τότε $f(0) = 0$. Άρα $f(f(0)) = f(0) = 0$ και το $x = 0$ είναι λύση της $f(f(x)) = 0$.

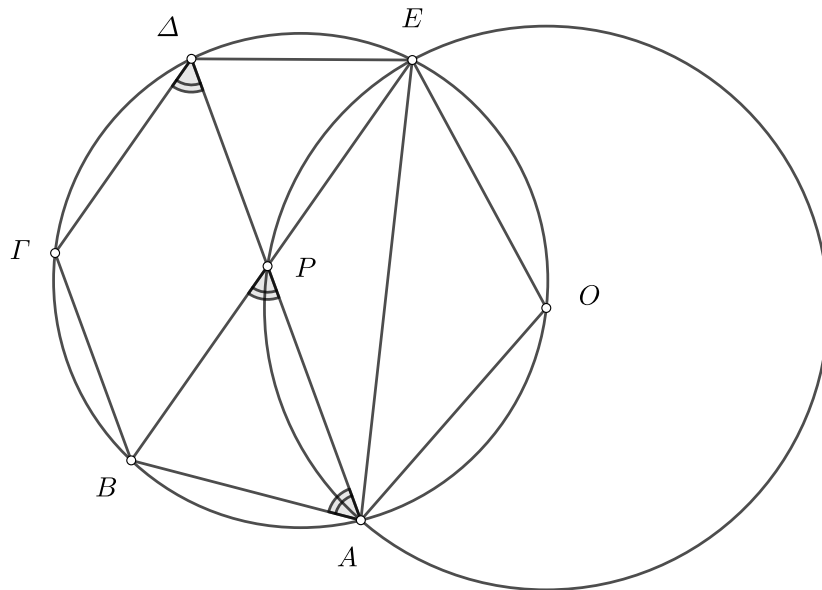
Αν τώρα $x \neq 0$ τότε (αφού η f είναι 1 - 1) $f(x) \neq f(0)$ και $f(f(x)) \neq f(f(0)) = 0$.

Άρα η μοναδική λύση είναι η $x = 0$.

(γ) Η $f(x) = \alpha x$ όπου $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ικανοποιεί τη συνθήκη διότι $x + \alpha x = \alpha^2 x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Πρόβλημα 3. Έστω σημεία A, B, Γ, Δ, E , με αυτή τη σειρά, πάνω σε έναν κύκλο (K) τέτοια, ώστε $AB = \Gamma\Delta$ και $B\Gamma = \Delta E$. Αν P το σημείο τομής των $A\Delta$ και BE , να δείξετε ότι το κέντρο του κύκλου που περνά από τα σημεία A, E και P ανήκει στον (K) .

Λύση:



Αφού τα A, B, Γ, Δ βρίσκονται πάνω σε κύκλο με $AB = \Gamma\Delta$ τότε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. Άρα $A\Delta \parallel B\Gamma$.

Ομοίως το $B\Gamma\Delta E$ είναι ισοσκελές τραπέζιο και $BE \parallel \Gamma\Delta$.

Έστω $\angle BPA = \vartheta$. Αφού $BE \parallel \Gamma\Delta$ τότε $\angle \Gamma\Delta A = \vartheta$. Αφού $AB\Gamma\Delta$ ισοσκελές τραπέζιο τότε $\angle \Delta AB = \angle \Gamma\Delta a = \vartheta$. Άρα $\angle ABE = 180^\circ - 2\vartheta$.

Έστω O το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου AEP . Τότε

$$\angle AOE = 2(180^\circ - \angle APE) = 2\angle APB = 2\vartheta$$

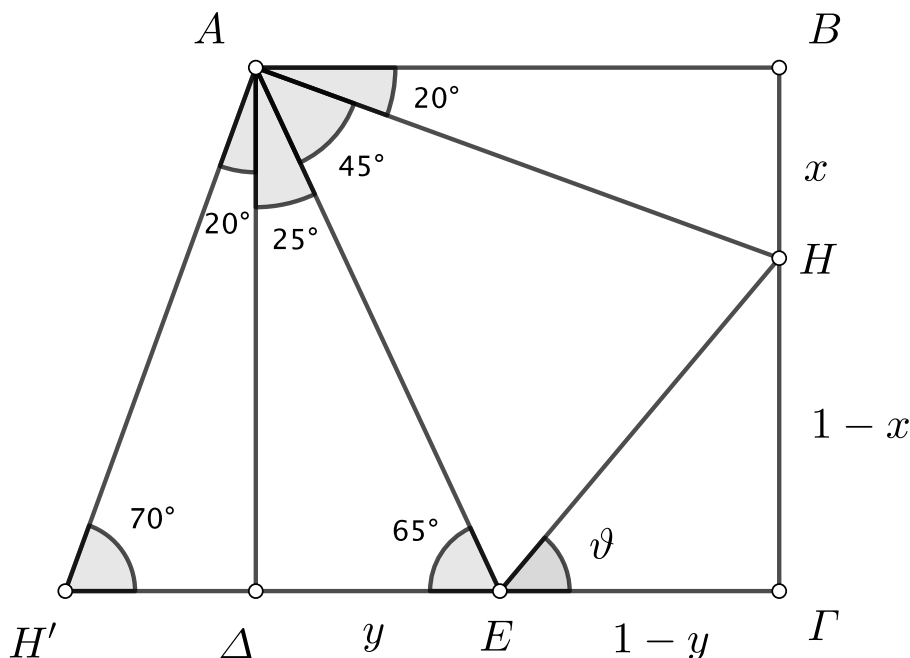
Αφού $\angle AOE + \angle ABE = 180^\circ$, τότε τα A, B, E, O βρίσκονται πάνω στον ίδιο κύκλο, δηλαδή τον (K) .

Πρόβλημα 4. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς μήκους 1 και σημεία E και H στις πλευρές $\Gamma\Delta$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα τέτοια, ώστε $\widehat{EAH} = 45^\circ$ και $\widehat{AHB} = 70^\circ$.

(α) Να βρείτε το μέτρο της γωνίας $\widehat{AEH}$.

(β) Να βρείτε την περίμετρο του τριγώνου $E\Gamma H$.

Λύση



(α) Επιλέγουμε σημείο H' στην προέκταση της $\Gamma\Delta$ προς το Δ τέτοιο, ώστε $\angle\Delta AH = 20^\circ$.

Τα τρίγωνα ABH και $AH'\Delta$ είναι ίσα αφού $AB = A\Delta = 1$ και έχουν ίσες τις γωνίες τους. Άρα $AH = AH'$.

Έχουμε $\angle BAH = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$. Άρα $\angle\Delta AE = 90^\circ - (45^\circ + 20^\circ) = 25^\circ$ και $\angle H'AE = 20^\circ + 25^\circ = 45^\circ = \angle HAE$. Άρα και τα τρίγωνα $AH'E$ και AHE είναι ίσα αφού η AE είναι κοινή, $AH = AH'$ και $\angle H'AE = \angle HAE$.

Συνεπώς $\angle AEH = \angle AEH' = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$.

(β) Έστω $BH = x$ και $\Delta E = y$. Τότε $H\Gamma = 1 - x$, $E\Gamma = 1 - y$ και $HE = H'E = H'\Delta + \Delta E = BH + \Delta E = x + y$.

Συνεπώς $\Pi_{E\Gamma H} = (1 - x) + (1 - y) + (x + y) = 2$.

Εναλλακτική Λύση

Έχουμε $BH = \varepsilon\varphi(20^\circ)$ και $\Delta E = \varepsilon\varphi(25^\circ)$. Άρα $H\Gamma = 1 - \varepsilon\varphi(20^\circ)$ και $E\Gamma = 1 - \varepsilon\varphi(25^\circ)$.

Έστω $\vartheta = \angle HEG$. Τότε

$$\varepsilon\varphi(\vartheta) = \frac{1 - \varepsilon\varphi(20^\circ)}{1 - \varepsilon\varphi(25^\circ)} = \frac{1 - \varepsilon\varphi(45^\circ - 25^\circ)}{1 - \varepsilon\varphi(25^\circ)} = \frac{1 - \frac{1 - \varepsilon\varphi(25^\circ)}{1 + \varepsilon\varphi(25^\circ)}}{1 - \varepsilon\varphi(25^\circ)} = \frac{2\varepsilon\varphi(25^\circ)}{1 - \varepsilon\varphi^2(25^\circ)} = \varepsilon\varphi(50^\circ)$$

Συνεπώς $\vartheta = 50^\circ$ και $\angle AEH = 180^\circ - 65^\circ - 50^\circ = 65^\circ$.

Επίσης

$$\begin{aligned}EH^2 &= E\Gamma^2 + H\Gamma^2 = (1 - \varepsilon\varphi(25^\circ))^2 + (1 - \varepsilon\varphi(20^\circ))^2 \\&= 2 - 2\varepsilon\varphi(25^\circ) - 2\varepsilon\varphi(20^\circ) + \varepsilon\varphi^2(25^\circ) + \varepsilon\varphi^2(20^\circ)\end{aligned}$$

Αλλά

$$\begin{aligned}1 - \varepsilon\varphi(25^\circ) &= \varepsilon\varphi(45^\circ) - \varepsilon\varphi(25^\circ) = \varepsilon\varphi(20^\circ)(1 + \varepsilon\varphi(45^\circ)\varepsilon\varphi(25^\circ)) \\&= \varepsilon\varphi(20^\circ) + \varepsilon\varphi(20^\circ)\varepsilon\varphi(25^\circ)\end{aligned}$$

Συνεπώς

$$EH^2 = \varepsilon\varphi^2(25^\circ) + \varepsilon\varphi^2(20^\circ) + 2\varepsilon\varphi(20^\circ)\varepsilon\varphi(25^\circ) = (\varepsilon\varphi(20^\circ) + \varepsilon\varphi(25^\circ))^2$$

Τελικά $EH = \varepsilon\varphi(20^\circ) + \varepsilon\varphi(25^\circ)$ και

$$\Pi_{E\Gamma\Gamma} = (1 - \varepsilon\varphi(20^\circ)) + (1 - \varepsilon\varphi(25^\circ)) + (\varepsilon\varphi(20^\circ) + \varepsilon\varphi(25^\circ)) = 2$$