



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2022

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 17/12/2022

Ώρα Εξέτασης: 09:30 - 12:30

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1

Να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$A = 5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}$$

είναι πολλαπλάσιο του 19, για όλες τις τιμές του θετικού ακεραίου n .

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε όλες τις τριάδες θετικών ακεραίων (α, β, γ) για τις οποίες ισχύει ότι

$$\alpha\beta\gamma = 2(\alpha + \beta + \gamma).$$

Πρόβλημα 3

Δίνονται κύκλοι $c_1(O_1, r_1)$ και $c_2(O_2, r_2)$ με $r_1 < r_2$ τεμνόμενοι στα σημεία A και B . Φέρουμε ευθεία (ε) κάθετη στο τμήμα O_2A σε ένα εσωτερικό του σημείο, έτσι ώστε η (ε) να τέμνει τον κύκλο c_1 στα διαφορετικά σημεία Γ και Δ . Έστω Γ_1 το δεύτερο σημείο τομής της ευθείας $A\Gamma$ με τον c_2 και Δ_1 το δεύτερο σημείο τομής της ευθείας $A\Delta$ με τον c_2 . Να αποδείξετε ότι:

- i. Τα σημεία $\Gamma, \Delta, \Gamma_1, \Delta_1$ είναι σημεία του ίδιου κύκλου, έστω (κ) .
- ii. Το κέντρο του (κ) είναι σταθερό, δηλαδή ανεξάρτητο της επιλογής της ευθείας (ε) .

Πρόβλημα 4

Δίνεται συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής στο $[0, 1]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$, με

$$f(0) = 0 \quad \text{και} \quad f(1) = 1.$$

Αν $a, b > 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (0, 1)$ με $x_1 \neq x_2$ τέτοια, ώστε

$$\frac{a}{f'(x_1)} + \frac{b}{f'(x_2)} = a + b$$