



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2025
«Α' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ»

Ημερομηνία: 13/12/2025 Ώρα Εξέτασης: 9:30-12:30

ΟΔΗΓΙΕΣ

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

Πρόβλημα 1. Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης

$$A = \left(1 - \frac{2}{3}\right) \left(1 - \frac{2}{5}\right) \left(1 - \frac{2}{7}\right) \cdots \left(1 - \frac{2}{2023}\right) \left(1 - \frac{2}{2025}\right).$$

Λύση. Έχουμε

$$A = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{7} \cdots \frac{2021}{2023} \cdot \frac{2023}{2025} = \frac{1}{2025}.$$

Πρόβλημα 2. Μια ομάδα 40 τουριστών επισκέφτηκαν την Κύπρο. Οι 33 επισκέφτηκαν την Αγία Νάπα, οι 21 τη Λεμεσό και οι 23 την Πάφο.

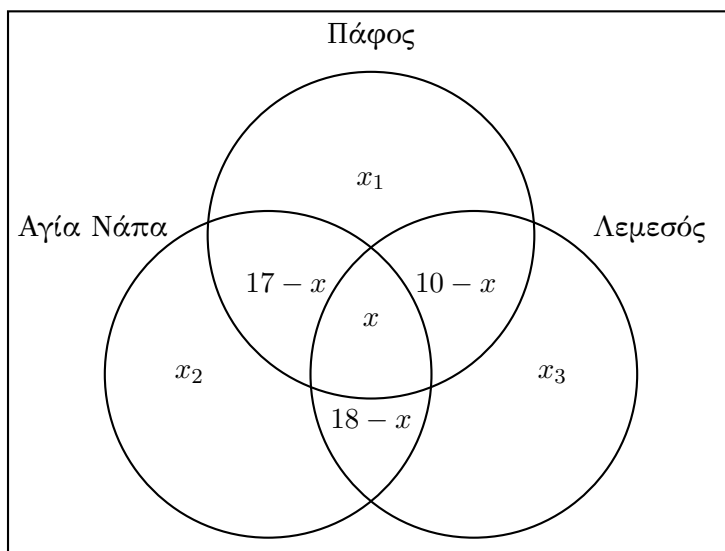
Την Αγία Νάπα και τη Λεμεσό επισκέφτηκαν 18 τουρίστες, τη Λεμεσό και την Πάφο 10 τουρίστες και την Αγία Νάπα και την Πάφο 17 τουρίστες.

Όλοι οι τουρίστες επισκέφτηκαν τουλάχιστον μία από αυτές τις περιοχές.

Να υπολογίσετε:

- (α) Πόσοι τουρίστες επισκέφτηκαν μόνο την Αγία Νάπα.
- (β) Πόσοι τουρίστες επισκέφτηκαν την Αγία Νάπα και τη Λεμεσό αλλά όχι την Πάφο.
- (γ) Πόσοι τουρίστες **δεν** επισκέφτηκαν τη Λεμεσό.

Λύση. Κατασκευάζουμε το πιο κάτω διάγραμμα Venn όπου με x συμβολίζουμε το πλήθος των τουριστών που επισκέφθηκαν και τις τρεις πόλεις.



Έχουμε

$$x_1 + (17 - x) + x + (10 - x) = 23 \implies x_1 = x - 4$$

$$x_2 + (17 - x) + x + (18 - x) = 33 \implies x_1 = x - 2$$

$$x_3 + (10 - x) + x + (18 - x) = 21 \implies x_1 = x - 7$$

Αφού όλοι οι τουρίστες ήταν 40, τότε

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + (17 - x) + (10 - x) + (18 - x) + x &= 40 \\ \implies (x - 4) + (x - 2) + (x - 7) + (45 - 2x) &= 40 \\ \implies x &= 40 - 45 + 13 = 8 \end{aligned}$$

Άρα

(α) Μόνο την Αγία Νάπα επισκέφθηκαν $x_2 = x - 2 = 6$ τουρίστες.

(β) Την Αγία Νάπα και τη Λεμεσό αλλά όχι την Πάφο επισκέφθηκαν $18 - x = 10$ τουρίστες.

(γ) Τη Λεμεσό δεν επισκέφθηκαν $40 - 21 = 19$ τουρίστες.

Πρόβλημα 3. Σε ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ τα σημεία K, Λ, M και N ανήκουν αντίστοιχα στις πλευρές $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta$ και ΔA . Είναι επίσης τέτοια, ώστε $AK = AN = N\Delta$, $\Delta M = 2N\Delta$, $KB = 3B\Lambda$ και $3\Lambda\Gamma = 4\Gamma M$

Αν το εμβαδόν του τετραπλεύρου $K\Lambda MN$ είναι 114cm^2 , να υπολογίσετε το εμβαδόν του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$.

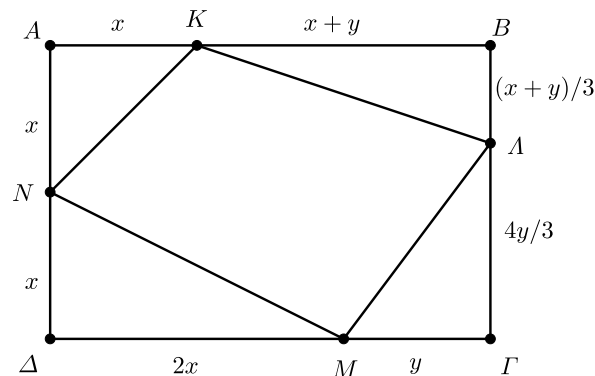
Λύση. Έστω $AK = x$. Τότε $AN = N\Delta = x$ και $\Delta M = 2x$.

Έστω $M\Gamma = y$. Τότε $\Gamma\Lambda = 4y/3$.

Επίσης, $AB = \Gamma\Delta = 2x + y$ άρα $BK = (2x + y) - x = (x + y)$. Συνεπώς $B\Lambda = (x + y)/3$.

Τότε

$$2x = A\Delta = B\Gamma = \frac{4y}{3} + \frac{x + y}{3} = \frac{x + 5y}{3} \implies 6x = x + 5y \implies x = y.$$



Έχουμε

$$E_{AB\Gamma\Delta} = 2x \cdot (2x + y) = 2x \cdot 3x = 6x^2$$

και

$$\begin{aligned} E_{AB\Gamma\Delta} &= E_{AKN} + E_{N\Delta M} + E_{M\Gamma\Lambda} + E_{\Lambda BK} + E_{K\Lambda MN} \\ &= \frac{x^2 + 2x^2 + 4x^2/3 + 4x^2/3}{2} + 114 \\ &= \frac{17x^2}{6} + 114 \end{aligned}$$

Άρα

$$114 = 6x^2 - \frac{17x^2}{6} = \frac{19x^2}{6} \implies 19x^2 = 6 \cdot 114 = 6 \cdot 6 \cdot 19 \implies x = 6 \text{ cm.}$$

Επομένως

$$E_{AB\Gamma\Delta} = 6x^2 = 216 \text{ cm}^2.$$

Πρόβλημα 4. Ο εννιαψήφιος αριθμός

$$189AB126\Gamma$$

διαιρείται από όλους εκτός από το πολύ έναν από τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 και 10.

Αν τα A, B και Γ συμβολίζουν τρία διαφορετικά ψηφία, να βρείτε τις τιμές τους.

Λύση. Ο αριθμός διαιρείται με τουλάχιστον ένα από τους 2 και 4, άρα διαιρείται με το 2.

Ο αριθμός διαιρείται με τουλάχιστον ένα από τους 5 και 10, άρα διαιρείται με το 5.

Αφού διαιρείται με το 2 και το 5, τότε διαιρείται με το 10, άρα $\boxed{\Gamma = 0}$.

Αφού ο αριθμός λήγει σε 260, τότε δεν διαιρείται με το 8. Άρα διαιρείται με όλους τους άλλους αριθμούς.

Αφού διαιρείται με το 9, τότε το $1 + 8 + 9 + A + B + 1 + 2 + 6 + \Gamma$ διαιρείται με το 9. Άρα και ο $A + B$ διαιρείται με το 9.

Αφού ο 189AB1260 διαιρείται με το 7, τότε και ο 189AB126 θα διαιρείται με το 7. Επίσης, ο 126 διαιρείται με το 7, άρα και ο $189AB126 - 126 = 189000$ θα διαιρείται με το 7, άρα και ο $189000/1000 = 189$ θα διαιρείται με το 7. Αφού ο 189 διαιρείται με το 7, τότε και ο 18900 διαιρείται με το 7 άρα και ο $189 - 18900 =$ διαιρείται με το 7.

Ο AB διαιρείται με το 7 αλλά και με το 9, αφού το άθροισμα των ψηφίων του είναι πολλαπλάσιο του 9, άρα $AB = 63$. Δηλαδή $\boxed{A = 6}$ και $\boxed{B = 3}$.