



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

Δεκέμβριος 2025

« Α ' ΛΥΚΕΙΟΥ »

Date: 13/12/2025

Time: 9:30-12:30

Οδηγίες

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, **αιτιολογώντας** πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.
5. Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 10 μονάδες.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Πρόβλημα 1. Με τον συμβολισμό $\overline{xy\omega}$ θα γράφουμε τον τριψήφιο αριθμό που έχει ψηφία, με αυτή τη σειρά, τα x, y, ω . Δηλαδή

$$\overline{xy\omega} = 100x + 10y + \omega.$$

Δίνεται ο τριψήφιος αριθμός $\overline{\alpha\beta\gamma}$ για τον οποίο ισχύει ότι

$$\overline{\beta\gamma\alpha} = (\alpha + \beta + \gamma)^3, \quad \beta \neq 0$$

Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$P = (\alpha + \beta + \gamma)(\overline{\alpha\beta\gamma} + 1) + (\alpha + \gamma)^2$$

Προτεινόμενη Λύση

Οι κύβοι αριθμών που είναι τριψήφιοι αριθμοί είναι:

$$5^3 = 125,$$

$$6^3 = 216,$$

$$7^3 = 343,$$

$$8^3 = 512,$$

$$9^3 = 729$$

Επομένως ο μόνος τριψήφιος αριθμός που ικανοποιεί την υπόθεση του προβλήματος είναι ο 251. Δηλαδή θα έχουμε

$$512 = (2 + 5 + 1)^3 = 8^3$$

Επομένως ισχύει

$$\overline{\beta\gamma\alpha} = (\alpha + \beta + \gamma)^3, \quad \beta \neq 0$$

Παίρνουμε

$$\alpha = 2, \beta = 5, \gamma = 1$$

Άρα η μοναδική τιμή της παράστασης

$$P = (\alpha + \beta + \gamma)(\overline{\alpha\beta\gamma} + 1) + (\alpha + \gamma)^2$$

είναι

$$P = (2 + 5 + 1)(251 + 1) + (1 + 2)^2 = 8 \cdot 252 + 9 = 2025$$

Πρόβλημα 2. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$T = \sqrt{994 \cdot 996 \cdot 998 \cdot 1000 + 16}$$

είναι φυσικός.

Προτεινόμενη Λύση

Θέτουμε $x = 1000$. Τότε θα πάρουμε

$$T = \sqrt{(x - 6) \cdot (x - 4) \cdot (x - 2) \cdot x + 16}$$

Κάνοντας τις πράξεις στο υπόριζο θα πάρουμε

$$T = \sqrt{(x^2 - 6x) \cdot (x^2 - 6x + 8) + 16}$$

Αν $y = x^2 - 6x$ έχουμε

$$T = \sqrt{y \cdot (y + 8) + 16}$$

ή διαφορετικά

$$T = \sqrt{y^2 + 8y + 16} = \sqrt{(y + 4)^2} = |y + 4|$$

και αφού $y + 4 > 0$ έχουμε

$$T = y + 4 = x^2 - 6x + 4$$

Επομένως

$$T = 1000^2 - 6 \cdot 1000 + 4 = 994004$$

Πρόβλημα 3.

(α) Να βρείτε πολυώνυμο $h(x, y)$ με $x, y \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε να ισχύει

$$x^6 + y^6 = (x^2 + y^2)h(x, y).$$

(β) Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί στο διάστημα $[0, \frac{\pi}{4}]$. Αποδείξτε ότι

$$\eta\mu^6 \alpha + 3 \eta\mu^2 \alpha \sigma\upsilon\nu^2 \beta + \sigma\upsilon\nu^6 \beta = 1$$

αν και μόνο αν $\alpha = \beta$.

Προτεινόμενη Λύση

(α) Κάνοντας την παρακάτω διαίρεση $(x^6 + y^6) : (x^2 + y^2)$

$$\begin{array}{r} x^4 - y^2 x^2 + y^4 \\ x^2 + y^2 \overline{) x^6 + y^6} \\ \underline{- x^6 - y^2 x^4} \\ y^2 x^4 \\ \underline{y^2 x^4 + y^4 x^2} \\ y^4 x^2 + y^6 \\ \underline{- y^4 x^2 - y^6} \\ 0 \end{array}$$

θα πάρουμε

$$x^6 + y^6 = (x^2 + y^2)(x^4 - x^2 y^2 + y^4)$$

ή διαφορετικά χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$ θα έχουμε

$$x^6 + y^6 = (x^2)^3 + (y^2)^3 = (x^2 + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4)$$

(β) Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα,

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x + y + z) [(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]$$

και θέτοντας $x = \eta\mu^2 \alpha$, $y = \sigma\upsilon\nu^2 \beta$ και $z = -1$ στο πρώτο μέρος της προηγούμενης ταυτότητας θα πάρουμε

$$(\eta\mu^2 \alpha)^3 + (\sigma\upsilon\nu^2 \beta)^3 + (-1)^3 - 3(\eta\mu^2 \alpha)(\sigma\upsilon\nu^2 \beta)(-1)$$

όμως από την δεδομένη τριγωνομετρική ταυτότητα έχουμε

$$\eta\mu^6 \alpha + 3 \eta\mu^2 \alpha \sigma\upsilon\nu^2 \beta + \sigma\upsilon\nu^6 \beta - 1 = 0$$

Επομένως θα πάρουμε από το δεύτερο μέρος της ταυτότητας ότι

$$\frac{1}{2}(\eta\mu^2 \alpha + \sigma\upsilon\nu^2 \beta - 1) [(\eta\mu^2 \alpha - \sigma\upsilon\nu^2 \beta)^2 + (\sigma\upsilon\nu^2 \beta - (-1))^2 + ((-1) - \eta\mu^2 \alpha)^2] = 0$$

Επομένως θα έχουμε

$$\eta\mu^2 \alpha + \sigma\upsilon\nu^2 \beta - 1 \implies \eta\mu^2 \alpha = 1 - \sigma\upsilon\nu^2 \beta \quad (1)$$

ή

$$\eta\mu^2 \alpha = \sigma\upsilon\nu^2 \beta = -1 \quad (2)$$

η (2) είναι αδύνατη. Από την (1) παίρνουμε

$$\eta\mu^2 \alpha = \eta\mu^2 \beta$$

και αφού α, β πραγματικοί αριθμοί στο διάστημα $[0, \frac{\pi}{4}]$ θα πάρουμε $\alpha = \beta$.
Για το αντίστροφο θα υποθέσουμε ότι $\alpha = \beta$ και θα αποδείξουμε ότι

$$\eta\mu^6 \alpha + 3 \eta\mu^2 \alpha \sigma\upsilon\nu^2 \alpha + \sigma\upsilon\nu^6 \alpha = 1$$

Πράγματι χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του πρώτου μέρους θα έχουμε

$$(\eta\mu^2 \alpha + \sigma\upsilon\nu^2 \alpha)(\eta\mu^4 \alpha - \eta\mu^2 \alpha \sigma\upsilon\nu^2 \alpha + \sigma\upsilon\nu^4 \alpha) + 3 \eta\mu^2 \alpha \sigma\upsilon\nu^2 \alpha$$

που ισούται με

$$\eta\mu^4 \alpha + 2 \eta\mu^2 \alpha \sigma\upsilon\nu^2 \alpha + \sigma\upsilon\nu^4 \alpha = (\eta\mu^2 \alpha + \sigma\upsilon\nu^2 \alpha)^2 = 1$$

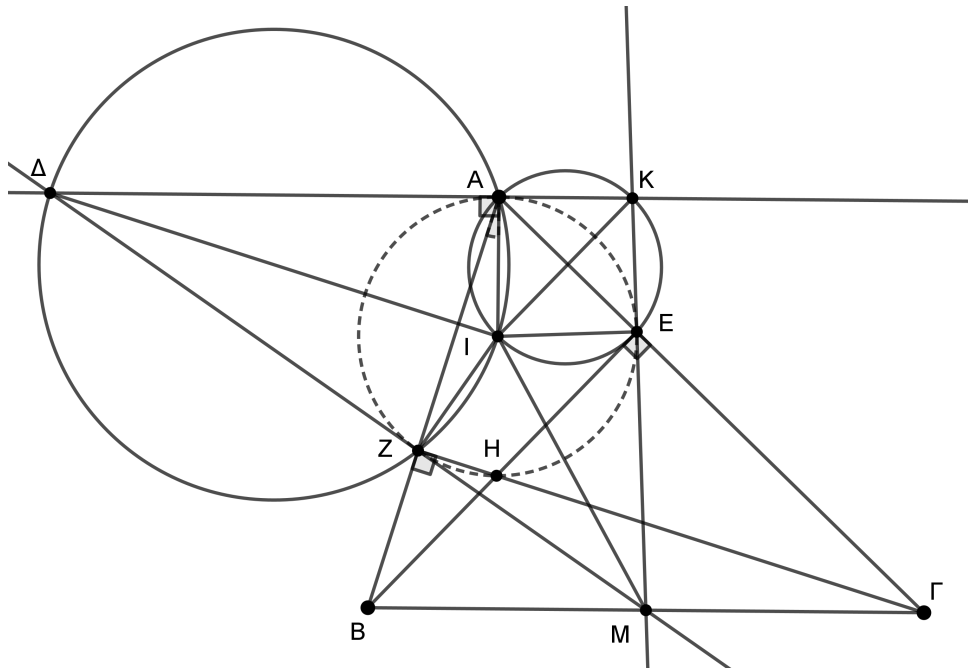
Πρόβλημα 4. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και $BE, \Gamma Z$ τα δύο ύψη του τριγώνου από τις κορυφές του B και Γ αντίστοιχα. Από την κορυφή A του τριγώνου φέρουμε παράλληλη ευθεία (ϵ) προς την ευθεία $B\Gamma$ και M το μέσο του τμήματος $B\Gamma$. Οι ευθείες ME και MZ τέμνουν την ευθεία (ϵ) στα σημεία K και Δ αντίστοιχα. Έστω I το δεύτερο σημείο τομής των περιγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων $AK\epsilon$ και $A\Delta Z$. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα IZM και IEM είναι ίσα.

Προτεινόμενη Λύση

Αφού τα τρίγωνα $BZ\Gamma$ και $B\epsilon\Gamma$ είναι ορθογώνια με έχουμε δεδομένο ότι το σημείο M είναι το

μέσο της υποτείνουσας $B\Gamma$ θα έχουμε

$$MZ = ME = \frac{B\Gamma}{2} \quad (1)$$



Επομένως από το ισοσκελές τρίγωνο MBZ θα έχουμε

$$\angle BZM = \angle MBZ$$

Επίσης επειδή $\Delta A \parallel B\Gamma$ παίρνουμε

$$\angle \Delta AZ = \angle MBZ$$

Άρα το τρίγωνο ΔAZ είναι ισοσκελές και επομένως

$$\Delta A = \Delta Z \quad (2)$$

Ομοίως

$$KA = KE \quad (3)$$

Από τις (1), (2) και (3) συμπεραίνουμε ότι τα σημεία A, Z, E είναι τα σημεία επαφής του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΔKM με τις πλευρές του $\Delta K, \Delta M$ και KM .

Επομένως αν I' το έγκεντρο του τριγώνου ΔKM τότε έχουμε $I'A \perp \Delta K$, $I'Z \perp \Delta M$ και $I'E \perp KM$. Άρα το I' ανήκει τους περιγεγραμμένους κύκλους των τριγώνων AKE και $A\Delta Z$. Δηλαδή το I' ταυτίζεται με το I .

Από τα προηγούμενα παίρνουμε ότι $IZ = IE$ και αφού $\angle IZM = \angle IEM = 90^\circ$ θα πάρουμε ότι τα ορθογώνια τρίγωνα IZM και IEM είναι ίσα.