



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2025

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 13/12/2025

Ώρα Εξέτασης: 09:30-12:30

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1

Αν για έναν αριθμό α ισχύει $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$, να διατάξετε τους αριθμούς

$$\alpha, -\alpha, \alpha^3, -\alpha^3, \alpha^4, -\alpha^4, \frac{1}{\alpha}, -\frac{1}{\alpha},$$

από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

Προτεινόμενη λύση

Αρχική παρατήρηση

Αφού $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$, ο α είναι **αρνητικός αριθμός μικρότερος του 1 σε απόλυτη τιμή**.

Άρα:

- αρνητικοί αριθμοί $\rightarrow \alpha, \alpha^3, -\alpha^4, \frac{1}{\alpha}$
- θετικοί αριθμοί $\rightarrow -\alpha, -\alpha^3, \alpha^4, -\frac{1}{\alpha}$

(επίσης ισχύει ότι για $|\alpha| < 1$ οι δυνάμεις του μικραίνουν καθώς αυξάνει ο εκθέτης)

Δείχνουμε βήμα-βήμα τα μεγέθη των όρων

Από

$$-\frac{1}{2} < \alpha < 0 \Rightarrow 0 < -\alpha < \frac{1}{2} \quad (1)$$

Πολλαπλασιάζουμε την (1) κατά μέλη με το εαυτό της:

$$0 < \alpha^2 < \frac{1}{4} \quad (2) \Rightarrow -\frac{1}{4} < -\alpha^2 < 0$$

Πολλαπλασιάζοντας την (1) με τη (2):

$$0 < -\alpha^3 < \frac{1}{8} \Rightarrow -\frac{1}{8} < \alpha^3 < 0$$

Υψώνοντας την (1) στην τέταρτη δύναμη:

$$0 < \alpha^4 < \frac{1}{16} \Rightarrow -\frac{1}{16} < -\alpha^4 < 0$$

Για το κλάσμα:

$$\text{αν } -\frac{1}{2} < \alpha < 0 \Rightarrow \frac{1}{\alpha} < -2 \text{ και } -\frac{1}{\alpha} > 2$$

Τελική διάταξη από μικρότερο $\rightarrow$ μεγαλύτερο

$$\frac{1}{\alpha} < \alpha < \alpha^3 < -\alpha^4 < 0 < \alpha^4 < -\alpha^3 < -\alpha < -\frac{1}{\alpha}$$

Πρόβλημα 2

Να βρείτε το μικρότερο πολλαπλάσιο του 35, που να λήγει σε 35 και το άθροισμα όλων των ψηφίων του είναι 35.

Προτεινόμενη λύση

Αφού ο αριθμός λήγει σε 35 και το άθροισμα των ψηφίων του είναι 35, τα άλλα ψηφία θα έχουν άθροισμα

$$35 - (3 + 5) = 27.$$

Ο μικρότερος αριθμός θα είναι ο **99935**, ο οποίος όμως δεν διαιρείται με το 35.

Άρα πάμε σε εξαψήφιους που λήγουν σε 35.

Δοκιμάζουμε πρώτα τετραψήφιους με άθροισμα 27, π.χ. τα ψηφία 1, 8, 9, 9:

1899, 1989, 1998 $\rightarrow$ αριθμοί που λήγουν σε 35: 189935, 198935, 199835.

Κανένας από αυτούς δεν διαιρείται με το 35,

Δοκιμάζουμε επόμενους τετραψήφιους με άθροισμα 27, π.χ. τα ψηφία 2, 8, 8, 9:

2889, 2898, 2988 $\rightarrow$ αριθμοί που λήγουν σε 35: 288935, 289835, 298835.

Από αυτούς, ο μόνος αριθμός που διαιρείται με το 35 είναι ο:

$$289835$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$. Παίρνουμε σημείο K στην πλευρά AB , και σημείο Λ στην πλευρά $B\Gamma$ έτσι ώστε $KB = 4\text{ cm}$ και $B\Lambda = 3\text{ cm}$.

Αν το τρίγωνο $\Delta K\Lambda$ είναι ορθογώνιο στο K , να υπολογίσετε το μήκος της ΔK .

Προτεινόμενη Λύση

Έστω πλευρά τετραγώνου $AB\Gamma\Delta = x$.

Στην πλευρά AB ισχύει $KB = 4 \Rightarrow AK = x - 4$ και

στην $B\Gamma$ ισχύει

$$BL = 3 \Rightarrow \Lambda\Gamma = x - 3.$$

Στο τρίγωνο KBL , όπου η γωνία στο B είναι ορθή

έχουμε:

$$KL^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \Rightarrow KL = 5.$$

Θέτω $\Delta K = \alpha$ και $\Delta\Lambda = \beta$.

Το τρίγωνο $\Delta K\Lambda$ είναι ορθογώνιο στο K , επομένως:

$$\alpha^2 + 5^2 = \beta^2 \quad (1)$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta\Delta K$:

$$\Delta\Delta = x, AK = x - 4$$

$$\alpha^2 = x^2 + (x - 4)^2 \quad (2)$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta\Gamma\Lambda$:

$$\Delta\Gamma = x, \Lambda\Gamma = x - 3$$

$$\beta^2 = x^2 + (x - 3)^2 \quad (3)$$

Από (1), (2), (3):

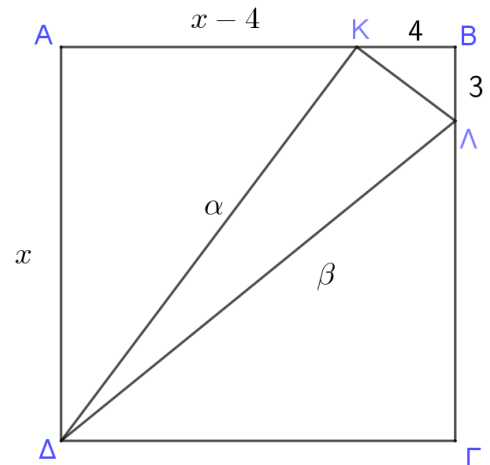
$$\begin{aligned} x^2 + (x - 4)^2 + 25 &= x^2 + (x - 3)^2 \\ 2x^2 - 8x + 16 + 25 &= 2x^2 - 6x + 9 \\ -2x &= 9 - 41 \Rightarrow 2x = 32 \Rightarrow x = 16. \end{aligned}$$

Άρα:

$$\Delta\Delta = 16 \text{ cm και } AK = 12 \text{ cm.}$$

Τώρα στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta\Delta K$:

$$\Delta K^2 = 16^2 + 12^2 = 256 + 144 = 400 \Rightarrow \Delta K = 20 \text{ cm.}$$



Πρόβλημα 4

Δίνονται οι αριθμοί $m = \sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$ και $n = \sqrt{2\sqrt{3} - 3}$. Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης A , όπου

$$A = \frac{\sqrt{1 + mn}}{m + n}$$

Προτεινόμενη Λύση:

Δίνονται:

$$m = \sqrt{5 - 2\sqrt{3}} \text{ και } n = \sqrt{2\sqrt{3} - 3}.$$

$$\text{Να υπολογιστεί: } A = \frac{\sqrt{1 + mn}}{m + n}.$$

Υπολογίζουμε πρώτα το $(m + n)^2$:

$$(m + n)^2 = m^2 + n^2 + 2mn$$

$$m^2 = 5 - 2\sqrt{3}, n^2 = 2\sqrt{3} - 3$$

$$m^2 + n^2 = (5 - 2\sqrt{3}) + (2\sqrt{3} - 3) = 2$$

$$(m + n)^2 = 2 + 2mn = 2(1 + mn)$$

$$m + n = \sqrt{2(1 + mn)} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + mn}$$

Τότε:

$$A = \frac{\sqrt{1 + mn}}{m + n} = \frac{\sqrt{1 + mn}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + mn}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$