



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

Δεκέμβριος 2025

« Β' ΛΥΚΕΙΟΥ »

Date: 13/12/2025

Time: 9:30-12:30

Οδηγίες

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, **αιτιολογώντας** πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.
5. Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 10 μονάδες.

Πρόβλημα 1. Έστω f πραγματική συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$f\left(\frac{x}{3}\right) = x^2 + x + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε το άθροισμα όλων των πραγματικών τιμών y για τις οποίες $f(3y) = 7$.

Πρόβλημα 2. Αν x, y μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί να αποδείξετε ότι

$$x^2 + y^2 + 4xy \geq 3\sqrt{xy}(x + y).$$

Πρόβλημα 3. Έστω ότι οι m, n είναι πραγματικοί αριθμοί και a ένας θετικός ακέραιος αριθμός. Δίνονται οι παρακάτω τρεις διαδοχικοί ακέραιοι αριθμοί γραμμένοι σε αύξουσα σειρά

$$(a + 1)n^2, \quad m^2, \quad a(n + 1)^2.$$

Να βρείτε την μεγαλύτερη δυνατή τιμή του m^2 .

Πρόβλημα 4. Δίνεται αμβλυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\angle A\Gamma B > 90^\circ$ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του (ω_1) με κέντρο του το O_1 . Ονομάζουμε (ω_2) τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου AO_1B και O_2 το κέντρο του. Έστω ότι οι ευθείες $A\Gamma$, $B\Gamma$ και O_1O_2 τέμνουν ξανά τον κύκλο (ω_2) στα σημεία Δ , Σ και E αντίστοιχα. Αν M είναι το σημείο τομής των ευθειών $\Delta\Sigma$ και ΓE , να αποδείξετε ότι οι ευθείες O_2M και $\Delta\Sigma$ είναι κάθετες.