



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

Δεκέμβριος 2025

« Β' ΛΥΚΕΙΟΥ »

Date: 13/12/2025

Time: 9:30-12:30

Οδηγίες

1. Να λύσετε **όλα** τα θέματα, **απολογώντας** πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.
5. Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 10 μονάδες.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Πρόβλημα 1. Έστω f πραγματική συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$f\left(\frac{x}{3}\right) = x^2 + x + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε το άθροισμα όλων των πραγματικών τιμών y για τις οποίες $f(3y) = 7$.

Προτεινόμενη Λύση

Θέτουμε $t = \frac{x}{3}$, που σημαίνει $x = 3t$. Αντικαθιστώντας $x = 3t$ στην δεδομένη εξίσωση θα πάρουμε

$$\begin{aligned} f(t) &= (3t)^2 + (3t) + 1 \\ &= 9t^2 + 3t + 1 \end{aligned}$$

Τώρα χρειαζόμαστε να βρούμε όλες τις τιμές των z έτσι ώστε $f(3z) = 7$. Αντικαθιστώντας $3z$ για t στην προηγούμενη εξίσωση παίρνουμε

$$\begin{aligned} f(3z) &= 9(3z)^2 + 3(3z) + 1 \\ &= 81z^2 + 9z + 1 \end{aligned}$$

Αφού από την υπόθεση $f(3z) = 7$, θα έχουμε

$$\begin{aligned} 81z^2 + 9z + 1 &= 7 \\ 81z^2 + 9z - 6 &= 0 \end{aligned}$$

Επειδή η τελευταία δευτεροβάθμια εξίσωση έχει διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 9^2 - 4 \cdot 81 \cdot (-6) > 0$$

θα έχουμε δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. Ξέρουμε όμως ότι το άθροισμα των ριζών μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι

$$S = -\frac{9}{81} = -\frac{1}{9}$$

Επομένως το άθροισμα όλων των πραγματικών τιμών y για τις οποίες $f(3y) = 7$ είναι $-\frac{1}{9}$.

Πρόβλημα 2. Αν x, y μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί να αποδείξετε ότι

$$x^2 + y^2 + 4xy \geq 3\sqrt{xy}(x + y).$$

Προτεινόμενη Λύση

Το αριστερό μέλος της ανισότητας γράφεται

$$x^2 + y^2 + 4xy = (x + y)^2 + 2(\sqrt{xy})^2$$

Επομένως η δεδομένη ανισότητα γράφεται ισοδύναμα

$$(x + y)^2 + 2(\sqrt{xy})^2 - 3\sqrt{xy}(x + y) \geq 0$$

ή ισοδύναμα

$$(x + y)^2 + 2(\sqrt{xy})^2 - 2\sqrt{xy}(x + y) - \sqrt{xy}(x + y) \geq 0$$

Παραγοντοποιώντας θα έχουμε

$$(x + y)(x + y - \sqrt{xy}) - 2\sqrt{xy}(x + y - \sqrt{xy}) \geq 0$$

ή

$$(x + y - \sqrt{xy})(x + y - 2\sqrt{xy}) \geq 0 \quad (1)$$

Όμως ξέρουμε την γνωστή ταυτότητα

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0 \iff x + y - 2\sqrt{xy} \geq 0$$

Επίσης

$$x + y \geq 2\sqrt{xy} \geq \sqrt{xy} \iff x + y - \sqrt{xy} \geq 0$$

Επομένως ισχύει η (1) και άρα θα έχουμε ότι

$$x^2 + y^2 + 4xy \geq 3\sqrt{xy}(x + y).$$

Πρόβλημα 3. Έστω ότι οι m, n είναι πραγματικοί αριθμοί και a ένας θετικός ακέραιος αριθμός. Δίνονται οι παρακάτω τρεις διαδοχικοί ακέραιοι αριθμοί γραμμένοι σε αύξουσα σειρά

$$(a + 1)n^2, \quad m^2, \quad a(n + 1)^2.$$

Να βρείτε την μεγαλύτερη δυνατή τιμή του m^2 .

Προτεινόμενη Λύση

Αφού οι δεδομένοι αριθμοί είναι διαδοχικοί θετικοί ακέραιοι ο τρίτος από τον πρώτο θα έχουν διαφορά 2. Επομένως θα έχουμε

$$a(n^2 + 2n + 1) = (a + 1)n^2 + 2$$

Κάνοντας τις πράξεις θα έχουμε

$$n^2 - 2an + 2 - a = 0$$

Λύνοντας της δευτεροβάθμια εξίσωση παίρνουμε

$$n = a \pm \sqrt{a^2 + a - 2}$$

Τώρα αφού ο αριθμός $(a+1)n^2$ είναι θετικός ακέραιος θα πρέπει το n^2 να είναι ρητός αριθμός. Για να ισχύει αυτό θα πρέπει το $a^2 + a - 2$ να είναι τέλειο τετράγωνο. Αυτό γίνεται όταν $a = 1, 2$. Όμως έχουμε

$$a^2 < a^2 + a - 2 < (a+1)^2$$

Επομένως το a είναι είτε 1 είτε 2.

- Αν $a = 1$ τότε έχουμε $n = 1$ και οι αριθμοί μας γίνονται

$$2, m^2, 4$$

Τότε $m^2 = 3 \iff m = \sqrt{3}$.

- Αν $a = 2$ τότε έχουμε $n = 0$ ή $n = 4$ και οι αριθμοί μας αν $n = 0$ γίνονται

$$0, m^2, 2$$

Τότε $m^2 = 1 \iff m = 1$.

Αν $n = 4$ οι αριθμοί μας γίνονται

$$48, m^2, 50$$

Τότε $m^2 = 49 \iff m = \sqrt{49} = 7$.

Πρόβλημα 4. Δίνεται αμβλυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\angle A\Gamma B > 90^\circ$ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του (ω_1) με κέντρο του το O_1 . Ονομάζουμε (ω_2) τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου AO_1B και O_2 το κέντρο του. Έστω ότι οι ευθείες $A\Gamma$, $B\Gamma$ και O_1O_2 τέμνουν ξανά τον κύκλο (ω_2) στα σημεία Δ , Σ και E αντίστοιχα. Αν M είναι το σημείο τομής των ευθειών $\Delta\Sigma$ και ΓE , να αποδείξετε ότι οι ευθείες O_2M και $\Delta\Sigma$ είναι κάθετες.

Προτεινόμενη Λύση

Χρησιμοποιώντας την σχέση μεταξύ εγγεγραμμένης και επίκεντρης γωνίας θα έχουμε

$$\angle A\Gamma B = 180^\circ - \angle B A \Gamma - \angle A B \Gamma$$

Αφού το O_1 είναι το περίκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$ θα έχουμε

$$\angle A\Gamma B = 180^\circ - \frac{\angle B O_1 \Gamma}{2} - \frac{\angle A O_1 \Gamma}{2}$$

Δηλαδή παίρνουμε

$$\angle A\Delta E = 180^\circ - \angle A O_1 E \quad (1)$$

Επίσης έχουμε

$$\angle A\Delta E = \angle A O_1 E \quad (2)$$

Επομένως από τις (1) και (2) προσθέτοντας θα έχουμε

$$\angle A\Delta E + \angle A\Delta E = 180^\circ$$

Άρα από την τελευταία βλέπουμε ότι $\Gamma\Sigma \parallel \Delta E$.

Ομοίως,

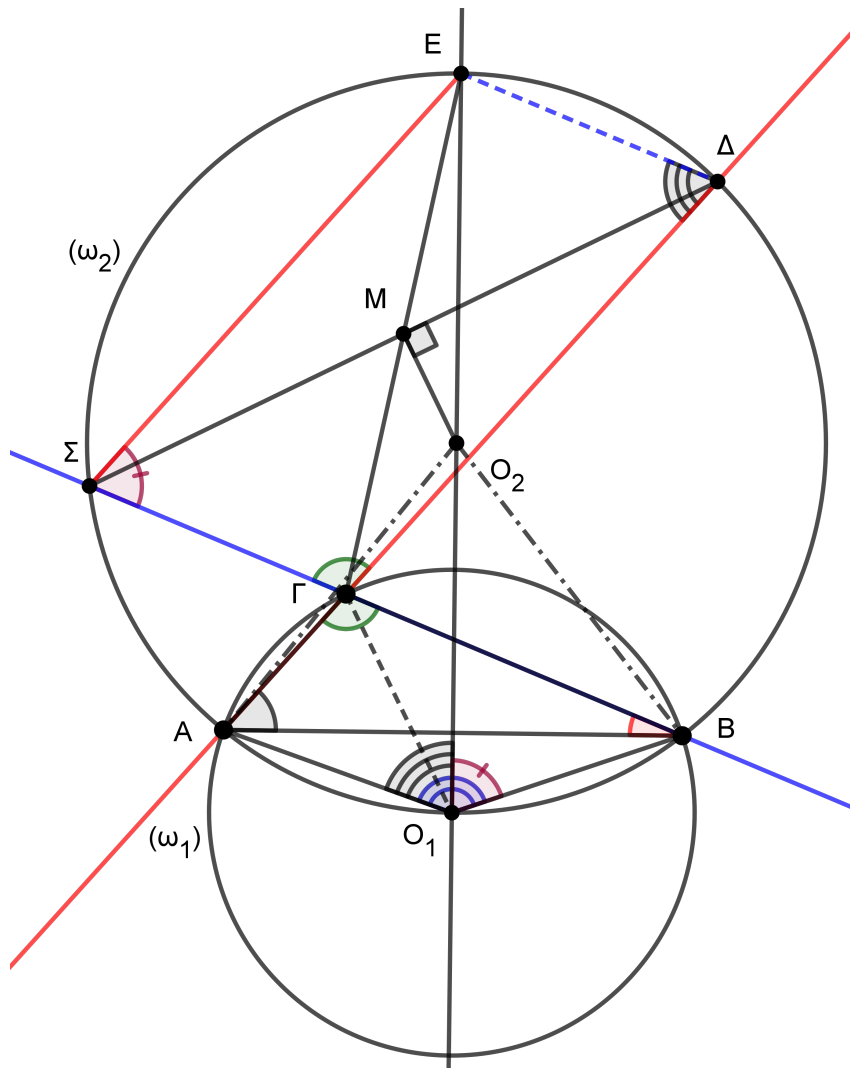
$$\angle B\Sigma E = \angle B O_1 E = \angle A O_1 E$$

Άρα

$$\angle AGB + \angle BSE = 180^\circ$$

Επομένως, $\Gamma\Delta \parallel \Sigma E$ και τελικά παίρνουμε ότι το τετράπλευρο $\Gamma\Sigma E\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο και έστω M το σημείο τομής των διαγωνίων του.

Επομένως το M είναι το μέσο του ΔZ . Δηλαδή το OM είναι το απόστημα της χορδής $\Sigma\Delta$.



Άρα οι ευθείες O_2M και $\Delta\Sigma$ είναι κάθετες.