



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2025
«Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ»

Ημερομηνία: 13/12/2025 Ώρα Εξέτασης: 9:30-12:30

ΟΔΗΓΙΕΣ

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

Πρόβλημα 1. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα κάθε τετραψήφιου φυσικού αριθμού και του ανάστροφού του είναι πολλαπλάσιο του 11.

Ως ανάστροφο ενός αριθμού ορίζουμε τον αριθμό που προκύπτει όταν διαβάζουμε τα ψηφία του με αντίστροφη σειρά. Για παράδειγμα, ο ανάστροφος του 2025 είναι ο 5202.

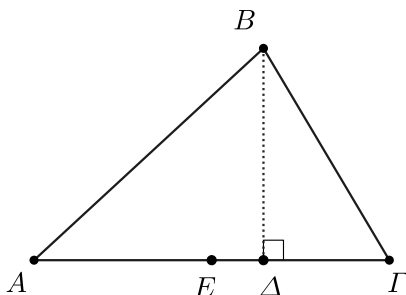
Λύση

Ένας τετραψήφιος αριθμός $abcd$ ισούται με $1000a + 100b + 10c + d$. Αντίστοιχα, ο ανάστροφος του, $dcb a$, θα ισούται με $1000d + 100c + 10b + a$. Επομένως, το άθροισμα των δυο αριθμών θα είναι ίσο με

$$\begin{aligned}(1000a + 100b + 10c + d) + (1000d + 100c + 10b + a) &= 1001a + 110b + 110c + 1001d \\ &= 11 \cdot (91a + 10b + 10c + 91d),\end{aligned}$$

που είναι πολλαπλάσιο του 11.

Πρόβλημα 2. Στο πιο κάτω σχήμα, δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB > B\Gamma$. Δίνεται επίσης το μέσο E της πλευράς GA , καθώς και σημείο Δ στην πλευρά GA τέτοιο ώστε το $B\Delta$ να είναι ύψος.



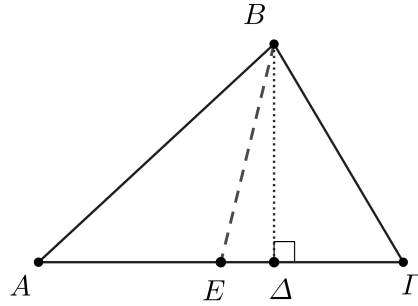
(α) Να αποδείξετε ότι

$$AB^2 = BE^2 + AE^2 + 2AE \cdot E\Delta.$$

(β) Να αποδείξετε ότι

$$AB^2 + B\Gamma^2 = 2(BE^2 + AE^2).$$

Λύση



(α) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $B\Delta A$ έχουμε

$$AB^2 = B\Delta^2 + \Delta A^2,$$

ενώ από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο $B\Delta A$ έχουμε

$$B\Delta^2 = BE^2 - \Delta E^2.$$

Συνδυάζοντας τις δυο σχέσεις, έχουμε

$$AB^2 = (BE^2 - \Delta E^2) + \Delta A^2.$$

Γράφουμε τώρα $\Delta A = \Delta E + EA$, που δίνει

$$AB^2 = (BE^2 - \Delta E^2) + (\Delta E + EA)^2 = (BE^2 - \Delta E^2) + (\Delta E^2 + 2\Delta E \cdot EA + EA^2).$$

Επομένως, καταλήγουμε στην ζητούμενη:

$$AB^2 = BE^2 - \Delta E^2 + \Delta E^2 + 2\Delta E \cdot EA + EA^2 = BE^2 + AE^2 + 2AE \cdot E\Delta.$$

(β) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ έχουμε

$$\begin{aligned} B\Gamma^2 &= B\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 = (BE^2 - \Delta E^2) + (E\Gamma - E\Delta)^2 \\ &= (BE^2 - \Delta E^2) + (E\Gamma^2 - 2E\Gamma \cdot E\Delta + E\Delta^2) \\ &= BE^2 + E\Gamma^2 - 2E\Gamma \cdot E\Delta. \end{aligned}$$

Αφού όμως E μέσο, είναι $E\Gamma = EA$, και άρα

$$B\Gamma^2 = BE^2 + EA^2 - 2EA \cdot E\Delta.$$

Προσθέτοντας κατα μέλη με την σχέση που αποδείξαμε στο ερώτημα (α), έχουμε:

$$AB^2 + B\Gamma^2 = BE^2 + AE^2 + 2AE \cdot E\Delta + BE^2 + EA^2 - 2EA \cdot E\Delta = 2(BE^2 + AE^2),$$

που είναι το ζητούμενο.

Πρόβλημα 3. Αν $x = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$, να βρείτε ακέραιους αριθμούς u, v τέτοιους ώστε να είναι

$$x^2 + \frac{24}{x^2} = u + v\sqrt{6}.$$

Λύση

Έχουμε

$$x - \sqrt{5} = \sqrt{2} + \sqrt{3}.$$

Τετραγωνίζοντας, παίρνουμε

$$x^2 - 2x\sqrt{5} + 5 = 5 + 2\sqrt{6}.$$

Γράφουμε την εξίσωση ως

$$x^2 - 2\sqrt{6} = 2x\sqrt{5}$$

και τετραγωνίζουμε για ακόμα μια φορά. Έχουμε:

$$x^4 - 4x^2\sqrt{6} + 24 = 20x^2,$$

και άρα

$$x^2 + \frac{24}{x^2} = 4 + 20\sqrt{6}.$$

Πρόβλημα 4.

(α) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$100260169$$

είναι τετράγωνο ακέραιου αριθμού.

(β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$10 \dots 0340 \dots 0289$$

(όπου υπάρχουν ακριβώς 2025 μηδενικά μεταξύ του 1 και του 3, και ακριβώς 2024 μηδενικά μεταξύ του 4 και του 2) είναι τετράγωνο ακέραιου αριθμού.

Λύση

(α) Ο αριθμός γράφεται ως

$$100260169 = 100000000 + 260000 + 169 = 10000^2 + 2 \cdot 10000 \cdot 13 + 13^2 = (10000 + 13)^2 = 10013^2,$$

και άρα είναι τετράγωνο ακέραιου αριθμού.

(β) Ο αριθμός γράφεται ως

$$10 \dots 0340 \dots 0289 = 10 \dots 0 + 340 \dots 0 + 289,$$

όπου ο πρώτος όρος έχει $2025 + 2 + 2024 + 3 = 4054$ μηδενικά, και ο δεύτερος όρος έχει $2024 + 3 = 2027$ μηδενικά. Έχουμε άρα:

$$\begin{aligned} 10 \dots 0340 \dots 0289 &= 10^{4054} + 34 \cdot 10^{2027} + 289 = (10^{2027})^2 + 2 \cdot 10^{2027} \cdot 17 + 17^2 \\ &= (10^{2027} + 17)^2, \end{aligned}$$

και άρα είναι τετράγωνο ακέραιου αριθμού.