

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ



ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

Δεκέμβριος 2025

« Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ »

Date: 13/12/2025

Time: 9:30-12:30

Οδηγίες

1. Να λύσετε **όλα** τα θέματα, **αιτιολογώντας** πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.
5. Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 10 μονάδες.

Πρόβλημα 1. Δίνεται συνάρτηση $f : [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = x \sin \frac{\pi}{x}.$$

Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \geq 2$:

- (α) $f'(x) > 1$,
(β) $(x+1) \sin \frac{\pi}{x+1} - x \sin \frac{\pi}{x} > 1$.

Πρόβλημα 2. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A\Delta$, BE και ΓZ τα ύψη του με Δ , E , Z πάνω στις πλευρές $B\Gamma$, ΓA και AB αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- (α) $\eta\mu x + \eta\mu y = 2 \eta\mu \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$,
(β) $\Delta E = R \eta\mu 2\Gamma$, όπου R είναι η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$,
(γ) $\Delta E + \Delta Z \leq B\Gamma$.

Πρόβλημα 3. Να λύσετε το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$xyz + \log_5 x = 35,$$

$$xyz + \log_5 y = 84,$$

$$xyz + \log_5 z = 259,$$

όπου x , y και z είναι πραγματικοί αριθμοί.

Πρόβλημα 4. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και Δ το μέσο του $B\Gamma$. Από το σημείο Δ φέρουμε κάθετες προς τις ευθείες AB και $A\Gamma$ και ονομάζουμε E και Z αντίστοιχα τα ίχνη των καθέτων πάνω στις AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Αν M είναι το μέσο του τμήματος EZ και O το περίκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$, να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΔM και AO είναι παράλληλες.