



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

Δεκέμβριος 2025

« Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ »

Date: 13/12/2025

Time: 9:30-12:30

Οδηγίες

1. Να λύσετε **όλα** τα θέματα, **αιτιολογώντας** πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.
5. Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 10 μονάδες.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Πρόβλημα 1. Δίνεται συνάρτηση $f : [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = x \sin \frac{\pi}{x}.$$

Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \geq 2$:

(α) $f'(x) > 1$,

(β) $(x+1) \sin \frac{\pi}{x+1} - x \sin \frac{\pi}{x} > 1$.

Προτεινόμενη Λύση

(α) Παραγωγίζοντας την συνάρτηση παίρνουμε

$$f'(x) = \sin \frac{\pi}{x} + \frac{\pi}{x} \eta \mu \frac{\pi}{x}, x \geq 2$$

Επομένως η δεύτερη παράγωγος είναι

$$f''(x) = \frac{\pi}{x^2} \eta \mu \frac{\pi}{x} - \frac{\pi}{x^2} \eta \mu \frac{\pi}{x} + \frac{\pi}{x} \left(-\frac{\pi}{x^2} \sin \frac{\pi}{x} \right)$$

ή κάνοντας τις πράξεις

$$f''(x) = -\frac{\pi^2}{x^3} \sin \frac{\pi}{x}$$

Άρα $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in [2, +\infty)$. Επομένως θα έχουμε ότι η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2, +\infty)$.

Όμως

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\sin \frac{\pi}{x} + \frac{\pi}{x} \eta \mu \frac{\pi}{x} \right] = 1$$

και αφού η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2, +\infty)$ παίρνουμε

$$f'(x) > \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 1, \forall x \geq 2$$

(β) Θεωρούμε το διάστημα $[x, x+1]$, $x \geq 2$. Η συνάρτηση f είναι

- παραγωγίσιμη στο $(x, x + 1)$ και
- συνεχής στο $[x, x + 1]$)

Επομένως από το θεώρημα της Μέσης Τιμής υπάρχει $\xi \in (x, x + 1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = f(x + 1) - f(x) = (x + 1) \frac{\pi}{x + 1} - x \operatorname{syn} \frac{\pi}{x}$$

Επειδή όμως ξέρουμε ότι $f'(x) > 1, \forall x \geq 2$ θα έχουμε και $f'(\xi) > 1, \forall x \geq 2$. Επομένως

$$(x + 1) \operatorname{syn} \frac{\pi}{x + 1} - x \operatorname{syn} \frac{\pi}{x} > 1$$

Πρόβλημα 2. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A\Delta, BE$ και ΓZ τα ύψη του με Δ, E, Z πάνω στις πλευρές $B\Gamma, \Gamma A$ και AB αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- (α) $\eta\mu x + \eta\mu y = 2 \eta\mu \frac{x + y}{2} \operatorname{syn} \frac{x - y}{2}$,
 (β) $\Delta E = R \eta\mu 2\Gamma$, όπου R είναι η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$,
 (γ) $\Delta E + \Delta Z \leq B\Gamma$.

Προτεινόμενη Λύση

(α) Ξέρουμε ότι

$$\begin{aligned}\eta\mu(\alpha + \beta) &= \eta\mu \alpha \operatorname{syn} \beta + \eta\mu \beta \operatorname{syn} \alpha \\ \eta\mu(\alpha - \beta) &= \eta\mu \alpha \operatorname{syn} \beta - \eta\mu \beta \operatorname{syn} \alpha\end{aligned}$$

Προσθέτοντας τις προηγούμενες σχέσεις θα έχουμε

$$\eta\mu(\alpha + \beta) + \eta\mu(\alpha - \beta) = 2 \eta\mu \alpha \operatorname{syn} \beta \quad (1)$$

Θέτουμε $x = \alpha + \beta$ και $y = \alpha - \beta$ και έχουμε

$$\begin{aligned}x + y = 2\alpha &\iff \alpha = \frac{x + y}{2} \\ x - y = 2\beta &\iff \beta = \frac{x - y}{2}\end{aligned}$$

Επομένως η (1) γίνεται

$$\eta\mu x + \eta\mu y = 2 \eta\mu \frac{x + y}{2} \operatorname{syn} \frac{x - y}{2}$$

(β) Επειδή το τετράπλευρο $AB\Delta E$ είναι εγγράφιο σε κύκλο θα πάρουμε

$$\angle \Delta E \Gamma = \angle A B \Gamma$$

και

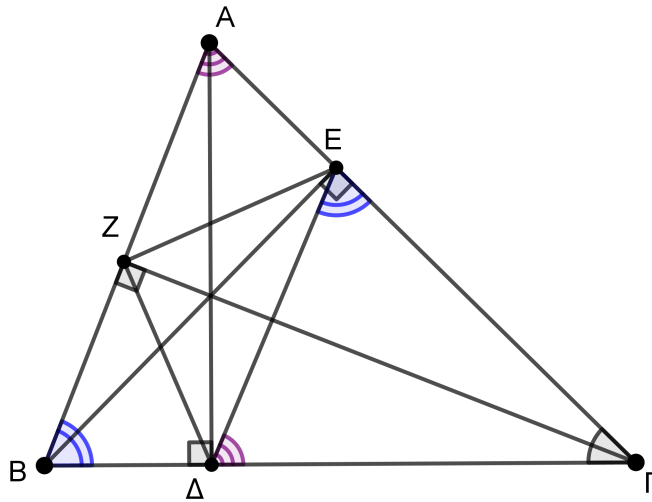
$$\angle E \Delta \Gamma = \angle B A \Gamma$$

Επομένως τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta E \Gamma$ είναι όμοια. Άρα από την ομοιότητα θα έχουμε

$$\frac{\Delta E}{AB} = \frac{E \Gamma}{B \Gamma} \implies \Delta E = \frac{AB \cdot E \Gamma}{B \Gamma}$$

Χρησιμοποιώντας τον νόμο των ημιτόνων θα πάρουμε

$$\Delta E = \frac{2R \eta\mu \Gamma \cdot E \Gamma}{B \Gamma} \quad (2)$$



Από το ορθογώνιο τρίγωνο $EΓB$ έχουμε: $\text{συν } \Gamma = \frac{EΓ}{BΓ} \iff EΓ = BΓ \cdot \text{συν } \Gamma$.
Επομένως η (2) γίνεται

$$\Delta E = 2R \eta\mu \Gamma \cdot \text{συν } \Gamma \iff \Delta E = R \eta\mu 2\Gamma$$

(γ) Όμοια λόγω του (β) θα έχουμε: $\Delta Z = R \eta\mu 2B$ και επίσης από τον νόμο των ημιτόνων παίρνουμε $BΓ = 2R \eta\mu A$. Άρα επειδή για τις γωνίες του τριγώνου $ABΓ$ ισχύει

$$0^\circ < A, B, \Gamma < 90^\circ$$

παίρνουμε

$$BΓ - (\Delta E + \Delta Z) = 2R \eta\mu A - (R \eta\mu 2\Gamma + R \eta\mu 2B)$$

Λόγω του (α) η τελευταία ισότητα γίνεται

$$BΓ - (\Delta E + \Delta Z) = R [2 \eta\mu A - 2 \eta\mu (B + \Gamma) \text{συν } (B - \Gamma)]$$

Όμως έχουμε $\eta\mu (B + \Gamma) = \eta\mu (180^\circ - A) = \eta\mu A$. Επομένως έχουμε

$$BΓ - (\Delta E + \Delta Z) = 2R \eta\mu A [1 - \text{συν } (B - \Gamma)]$$

Επειδή, $1 - \text{συν } (B - \Gamma) \geq 0$ θα πάρουμε τελικά

$$BΓ - (\Delta E + \Delta Z) \geq 0 \iff \Delta E + \Delta Z \leq BΓ$$

Πρόβλημα 3. Να λύσετε το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$xyz + \log_5 x = 35,$$

$$xyz + \log_5 y = 84,$$

$$xyz + \log_5 z = 259,$$

όπου x, y και z είναι πραγματικοί αριθμοί.

Προτεινόμενη Λύση

Θέτουμε $x = 5^a$, $y = 5^b$, και $z = 5^c$. Τότε το σύστημα μετασχηματίζεται

$$5^{a+b+c} + a = 35,$$

$$5^{a+b+c} + b = 84,$$

$$5^{a+b+c} + c = 259.$$

Προσθέτοντας τις τρεις εξισώσεις θα πάρουμε

$$3 \cdot 5^{a+b+c} + (a + b + c) = 378.$$

Επιλέγουμε $t \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $3t = a + b + c$. Τότε θα έχουμε

$$3 \cdot 5^{3t} + 3t = 378 \quad \text{και} \quad 125^t + t = 126.$$

Θεωρούμε την πραγματική συνάρτηση f με τύπο $f(t) = 125^t + t - 126$. Μια προφανής λύση της εξίσωσης $f(t) = 0$ είναι για $t = 1$.

Παραγωγίζοντας την f θα πάρουμε

$$f'(t) = 125^t \ln 125 + 1$$

Επειδή $f'(t) > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ η f είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Επομένως $t = 1$ είναι μοναδική λύση της εξίσωσης $125^t + t = 126$. Άρα

$$a + b + c = 3,$$

Αντικαθιστώντας θα πάρουμε

$$5^3 + a = 35 \quad \Rightarrow \quad a = -90,$$

$$5^3 + b = 84 \quad \Rightarrow \quad b = -41,$$

$$5^3 + c = 259 \quad \Rightarrow \quad c = 134.$$

Τελικά θα έχουμε

$$x = 5^{-90} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{5^{90}},$$

$$y = 5^{-44} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{5^{44}},$$

$$z = 5^{134}.$$

Πρόβλημα 4. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και Δ το μέσο του $B\Gamma$. Από το σημείο Δ φέρουμε κάθετες προς τις ευθείες AB και $A\Gamma$ και ονομάζουμε E και Z αντίστοιχα τα ίχνη των καθέτων πάνω στις AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Αν M είναι το μέσο του τμήματος EZ και O το περίκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$, να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΔM και AO είναι παράλληλες.

Προτεινόμενη Λύση

Έστω Σ η τομή των ευθειών AO και $B\Gamma$. Έστω T το δεύτερο σημείο τομής της ευθείας $A\Delta$ με τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $AB\Gamma$.

Τότε τα τετράπλευρα $ABT\Gamma$ και $AE\Delta Z$ είναι εγγράφιμα. Επομένως έχουμε τις παρακάτω ισότητες γωνιών

$$\angle T B \Delta = \angle T A \Gamma = \angle \Delta E Z$$

και

$$\angle T \Gamma \Delta = \angle T A B = \angle E Z \Delta$$

.....

1 1 1 1 0 1

10. $\frac{1}{2} \sin 2\theta = \frac{1}{2}$