



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2025

ΣΤ' ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Ημερομηνία: 13/12/2025

Ωρα Εξέτασης: 9:30-11:30

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1

Δίνονται οι σχέσεις $\alpha + \beta + \gamma = 13\frac{3}{5}$ και $\alpha - \frac{1}{2}\beta = \frac{7}{2}$. Να βρείτε:

- i. Την τιμή της παράστασης $2\alpha - \beta$.
- ii. Την τιμή της παράστασης $3\alpha + \gamma$.

Προτεινόμενη Λύση

$$(1) \quad \alpha - \frac{1}{2}\beta = \frac{7}{2}$$

$$(2) \quad \alpha + \beta + \gamma = 13\frac{3}{5} = \frac{68}{5}.$$

- i. Πολλαπλασιάζουμε την (1) επί 2 $\Rightarrow 2\alpha - \beta = 2\left(\alpha - \frac{1}{2}\beta\right) = 2 \cdot \frac{7}{2} = 7$ (3)
- ii. Προσθέτουμε στην (2) την (3) και έχουμε

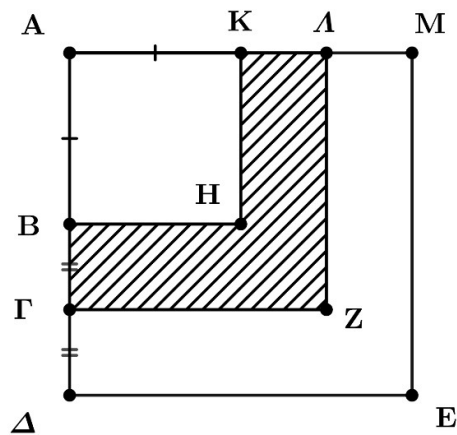
$$\alpha + \beta + \gamma + 2\alpha - \beta = 3\alpha + \gamma = \frac{68}{5} + 7 = \frac{103}{5}$$

Πρόβλημα 2

Δίνεται το πιο κάτω σχήμα ΑΜΕΔ.

Η πλευρά $AK = (5\chi - 12) \text{ cm}$. Το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΚΗΒ είναι 169 cm^2 . Τα σημεία Β και Κ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΔ και ΑΜ αντίστοιχα και τα σημεία Γ και Λ είναι τα μέσα των πλευρών ΒΔ και ΚΜ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε:

- i. την τιμή του χ
- ii. το εμβαδόν του σκιασμένου σχήματος ΚΛΖΓΒΗΚ και
- iii. την περίμετρο του σχήματος ΑΜΕΔΓΖΛ.



Προτεινόμενη Λύση

- i. Αφού $E_{AKHB} = 169 \Rightarrow AK = 13$ cm
 Άρα $5\chi - 12 = 13 \Rightarrow 5\chi = 25 \Rightarrow \chi = 5$.
- ii. Οι πλευρές του τετραγώνου είναι $AK = KH = HB = AB = 13$ cm.

Εφόσον, τα σημεία B και K είναι μέσα των πλευρών $A\Delta$ και AM αντίστοιχα και

$$AK = AB = 13 \text{ cm, τότε } A\Delta = AM = 26 \text{ cm.}$$

Τώρα, τα σημεία Γ και Λ μέσα των πλευρών $B\Delta$ και KM , αντίστοιχα και

$$B\Delta = KM = 13 \text{ cm, άρα } B\Gamma = K\Lambda = \frac{13}{2} \text{ cm.}$$

Επομένως,

$$A\Lambda = AK + K\Lambda = 13 + \frac{13}{2} = \frac{39}{2} \text{ cm}$$

και

$$A\Lambda = \Lambda Z = \Gamma Z = A\Gamma = \frac{39}{2} \text{ cm}$$

διότι το $A\Lambda Z\Gamma$ είναι τετράγωνο.

$$\text{Συμπερασματικά, το εμβαδόν του } A\Lambda Z\Gamma \text{ είναι } \left(\frac{39}{2}\right)^2 = \frac{1521}{4} \text{ cm}^2$$

Το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους θα το βρούμε αφαιρώντας το εμβαδόν του τετραγώνου $AKHB$ από το εμβαδόν του τετραγώνου $A\Lambda Z\Gamma$, δηλαδή

$$E_{\sigma\kappa} = \frac{1521}{4} - 169 = \frac{1521}{4} - \frac{676}{4} = \frac{845}{4} \text{ cm}^2 = 211\frac{1}{4} \text{ cm}^2$$

- iii. Η περίμετρος του σχήματος $\Lambda ME\Delta\Gamma Z\Lambda$ είναι

$$\Lambda M + ME + E\Delta + \Delta\Gamma + \Gamma Z + Z\Lambda = \frac{13}{2} + 26 + 26 + \frac{13}{2} + \frac{39}{2} + \frac{39}{2} = 104 \text{ cm}$$

Πρόβλημα 3

Να βρείτε τον μικρότερο φυσικό αριθμό που όταν διαιρεθεί με το 2 αφήνει υπόλοιπο 1, με το 3 υπόλοιπο 2 και με το 5 υπόλοιπο 4. Αν γράψουμε τους επόμενους αριθμούς με την ιδιότητα αυτή ποιος είναι ο 20ος αριθμός;

Προτεινόμενη Λύση

Αφού ο αριθμός που ψάχνουμε αφήνει υπόλοιπο 4 όταν τον διαιρέσουμε με το 5 θα είναι της μορφής $5n + 4$.

Βρίσκουμε τους πρώτους αριθμούς με την ιδιότητα αυτή και είναι οι

$$9, 14, 19, 24, 29, 34, \dots$$

Ο αριθμός που ψάχνουμε αφήνει υπόλοιπο 1 όταν διαιρεθεί με το 2 άρα είναι περιττός (μονός)

$$9, 14, 19, 24, 29, 34, \dots$$

Ελέγχουμε από τους αριθμούς που έμειναν (9, 19, 29, ...) ποιος είναι ο πιο μικρός που όταν διαιρεθεί με το 3 αφήνει υπόλοιπο 2.

$$9 = 3 \cdot 3 \text{ (υπόλοιπο 0)}$$

$$19 = 3 \cdot 6 + 1 \text{ (υπόλοιπο 1)}$$

$$29 = 3 \cdot 9 + 2 \text{ (υπόλοιπο 2)}$$

Άρα ο αριθμός που ψάχνουμε είναι ο $29 = 2 \cdot 3 \cdot 5 - 1 = 1 \cdot 30 - 1$.

Ο επόμενος αριθμός με την ιδιότητα αυτή είναι ο 59, δηλαδή $2 \cdot 30 - 1$

Επομένως ο 20^{ος} αριθμός θα είναι ο $20 \cdot 30 - 1 = 599$

(**Εναλλακτικά:** Παρατηρούμε ότι αν προσθέσουμε 1 στον αριθμό που ψάχνουμε, ο καινούργιος αριθμός θα είναι πολλαπλάσιο του 2 και του 3 και του 5. Δηλαδή θα είναι πολλαπλάσιο του 30. Από τα πολλαπλάσια του 30 αφαιρώντας 1 βρίσκουμε τους αριθμούς 29, 59, 89, ...)

Πρόβλημα 4

Ένα βιβλιοπωλείο πουλάει 4 βιβλία Άλφα, Βήτα, Γάμα και Δέλτα σε προσφορά. Αν αγοράσεις τρία βιβλία, παίρνεις το φθηνότερο δωρεάν. Να υπολογίσετε πόσο κοστίζουν τα τέσσερα βιβλία αν γνωρίζετε τα πιο κάτω:

Αν αγοράσεις 1 Άλφα, 1 Βήτα και 1 Γάμα πληρώνεις 18 ευρώ.

Αν αγοράσεις 1 Δέλτα, 1 Βήτα και 1 Γάμα πληρώνεις 25 ευρώ.

Αν αγοράσεις 1 Δέλτα, 1 Άλφα και 1 Γάμα πληρώνεις 23 ευρώ και τέλος αν αγοράσεις 1 Δέλτα, 1 Άλφα και 1 Βήτα πληρώνεις 25 ευρώ.

Η τιμή δύο βιβλίων είναι η ίδια.

Προτεινόμενη Λύση

Συμβολίζουμε με A, B, Γ και Δ αντίστοιχα τις τιμές των τεσσάρων βιβλίων.

Ισχύει ότι

$$A + B + \Gamma = 18 \quad (1)$$

$$B + \Gamma + \Delta = 25 \quad (2)$$

$$A + \Gamma + \Delta = 23 \quad (3)$$

$$A + B + \Delta = 25 \quad (4)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) καταλαβαίνουμε ότι $\Delta > A$ και ότι $\Delta = A + 7$

Από τις σχέσεις (2) και (3) καταλαβαίνουμε ότι $B > A$ και ότι $B = A + 2$

Τέλος από τις σχέσεις (2) και (4) καταλαβαίνουμε ότι $A = \Gamma$.

Άρα από τα παραπάνω έχουμε ότι $\Delta > B > A = \Gamma$.

Ξέρουμε έτσι σε κάθε άθροισμα ποιο είναι το φθηνότερο βιβλίο που δεν θα πληρώσουμε.

Οι 4 ισότητες γίνονται τώρα

$$A + B = 18 \quad (\alpha)$$

$$B + \Delta = 25 \quad (\beta)$$

$$A + \Delta = 23 \quad (\gamma)$$

$$B + \Delta = 25 \quad (\delta)$$

$$A + B = 18 \text{ άρα } A + A + 2 = 18 \text{ άρα } \mathbf{A = 8}$$

$$B = A + 2 = 8 + 2 \text{ άρα } \mathbf{B = 10}$$

$$\Delta = A + 7 = 8 + 7 \text{ άρα } \mathbf{\Delta = 15}$$

$$\text{Τέλος } \mathbf{\Gamma = A = 8}$$