Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία

Β′ Διαγωνισμός Επιλογής Λυκείου

«Ευκλείδης»

Ημερομηνία: 03/04/2021 Ώρα Εξέτασης: 10:00-14:30

Οδηγίες

1. Να λύσετε **<u>όλα</u>** τα θέματα, **αιτιολογώντας** πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Πρόβλημα 1. Να βρείτε όλα τα ζεύγη φυσικών αριθμών (α,β) για τα οποία ισχύει

$$\delta^2 + 9\alpha\beta + 9\delta(\alpha+\beta) = 7\delta\alpha\beta$$

όπου δ ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των α,β.

Προτεινόμενη Λύση.
Αφού $\delta = M.K.\Delta(\alpha,\beta)$, έχουμε

$$\alpha = \delta x, \beta = \delta y \text{ με } (x,y) = 1$$

Αντικαθιστώντας στην δεδομένη σχέση θα έχουμε

$$\delta^2 + 9\delta^2 xy + 9\delta^2(x+y) = 7\delta^3 xy \Longrightarrow 1 + 9xy + 9(x+y) = 7\delta xy$$

$$\delta = \frac{1+9xy+9(x+y)}{7xy} \tag{1}$$

Παρατηρούμε καταρχάς ότι αν $\delta \geqslant 5$ παίρνουμε

$$\frac{1+9xy+9(x+y)}{7xy} \geqslant 5 \Longrightarrow 1 + 9x + 9y \geqslant 26xy$$

Αφού $x,y \geqslant 1$ έχουμε $9x \leqslant 9xy$ και $9y \leqslant 9xy$. Άρα η προηγούμενη ανισότητα γίνεται

$$26xy \leqslant 1 + 9x + 9y \leqslant 1 + 18xy \Longrightarrow 26xy - 18xy \leqslant 1 \Longrightarrow 8xy \leqslant 1$$

που είναι άτοπο. Επομένως θα έχουμε ότι $\delta \leqslant 4$.Επιπλέον αφού ισχύει $9xy > 7xy$ από την (1) συμπεραίνουμε ότι $\delta > 1$. Άρα έχουμε

$$\delta \in \{2,3,4\}$$

Εξετάζουμε κάθε περίπτωση ξεχωριστά.

- Αν $\delta = 2$ τότε η (1) γίνεται

$$\delta = \frac{1+9xy+9(x+y)}{7xy} \Longrightarrow \frac{1+9xy+9(x+y)}{7xy} = 2$$

που γράφεται

$$5xy = 1 + 9x + 9y \iff y = \frac{9x+1}{5x-9} = 2 - \frac{x-19}{5x-9}$$

επομένως το $5x-9$ διαιρεί τον αριθμό $x-19$ και επίσης διαιρεί και τον

$$5x - 9 - 5(x-19) = 86$$

άρα

$$5x - 9 \in \{\pm 1, \pm\, 2, \pm 43, \pm 86\}$$

και αφού x είναι ακέραιος, οι μόνες αποδεκτές περιπτώσεις είναι:

$$5x - 9 = 1 \iff x = 2$$

και

$$5x - 9 = 86 \iff x = 19$$

Επομένως τα ζευγάρια λύσεων είναι:

$$(\alpha{,}\beta) = (4{,}38) \text{ και } (\alpha{,}\beta) = (38{,}4)$$

- Αν $\delta = 3$ τότε η (1) γίνεται

$$\delta = \frac{1+9xy+9(x+y)}{7xy} \Longrightarrow \frac{1+9xy+9(x+y)}{7xy} = 3$$

που γράφεται

$$12xy - 9x - 9y = 1$$

άτοπο αφού το αριστερό μέλος της τελευταίας εξίσωσης διαιρείται με το 3 ενώ το δεξί μέλος δεν διαιρείται με το 3.

- Αν $\delta = 4$ τότε η (1) γίνεται

$$\delta = \frac{1+9xy+9(x+y)}{7xy} \Longrightarrow \frac{1+9xy+9(x+y)}{7xy} = 4$$

που γράφεται

$$19xy - 9x - 9y = 1 \iff y = \frac{9x+1}{19x-9}$$

Άρα αφού $x{,}y \geqslant 1$ έχουμε $19x - 9 \geqslant 0$ και

$$9x + 1 \geqslant 19x - 9 \iff x \leqslant 1$$

Επομένως $x = 1$ και $y = 1$ και η λύση είναι

$$(\alpha{,}\beta) = (4{,}4)$$

Πρόβλημα 2. Εννέα μέλη μιας επιτροπής ψηφίζουν για να εκλέξουν πρόεδρο. Υπάρχουν τρεις υποψήφιοι πρόεδροι και κάθε μέλος της επιτροπής κατατάσσει τους υποψηφίους προέδρους σε μια σειρά δίνοντας 3 βαθμούς στην πρώτη επιλογή του, 2 βαθμούς στην δεύτερη επιλογή του και 1 βαθμό στην τρίτη στην σειρά επιλογή του.

Στο τέλος της ψηφοφορίας προστέθηκαν οι βαθμοί κάθε υποψηφίου και παρατηρήθηκε ότι κάθε υποψήφιος πήρε διαφορετικό σύνολο βαθμών και έτσι υπήρξε μια ξεκάθαρη τελική κατάταξη των υποψηφίων. Παρατηρήθηκε επίσης ότι αν το κάθε μέλος επέλεγε μόνο έναν υποψήφιο, την πρώτη του επιλογή, τότε η τελική κατάταξη των υποψηφίων θα ήταν με την αντίστροφη σειρά.

Να βρείτε την τελική βαθμολογία του κάθε υποψηφίου.

Προτεινόμενη Λύση.

Έστω C_1,C_2, C_3 οι υποψήφιοι πρόεδροι με τελική σειρά

$$C_1 - C_2 - C_3$$

Ονομάζουμε $s(C_1)$, $s(C_2)$, $s(C_3)$ το άθροισμα των βαθμών που συγκέντρωσαν οι υποψήφιοι πρόεδροι C_1,C_2, C_3 αντίστοιχα.
Για $i = 1,2,3$ ονομάζουμε

- x_i, τον αριθμό (τις φορές που ψηφίστηκε για την πρώτη θέση) που ο C_i ήταν στην 1^η θέση.
- y_i, τον αριθμό που ο C_i ήταν στην 2^η θέση.
- z_i, τον αριθμό που ο C_i ήταν στην 3^η θέση.

Τότε έχουμε τις προφανείς εξισώσεις

$$s(C_i) = 3x_i + 2y_i + z_i, i = 1,2,3$$

και αφού ψήφισαν 9 άτομα και ο C_i θα ήταν κάποιες φορές στην 1^η θέση, κάποιες φορές στην 2^η θέση και κάποιες φορές στην 3^η θέση τότε θα έχουμε

$$x_i + y_i + z_i = 9, i = 1,2,3$$

και

$$x_1 + x_2 + x_3 = 9, y_1 + y_2 + y_3 = 9, z_1 + z_2 + z_3 = 9$$

Ο κάθε ένας από τους 9 δίνει συνολικά 6 βαθμούς $(3 + 2 + 1 = 6)$ άρα το σύνολο των βαθμών είναι

$$9 \cdot 6 = 54$$

Αφού

$$s(C_1) > s(C_2) > s(C_3)$$

συμπεραίνουμε ότι

$$s(C_3) < 18$$

Αν επέλεγαν ένα μόνο υποψήφιο τότε η σειρά θα ήταν

$$C_3 - C_2 - C_1$$

και άρα $x_1 < x_2 < x_3$ και αφού το άθροισμα $x_1 + x_2 + x_3 = 9$ και κερδίζει ο C_3 έχουμε $x_3 \geqslant 4$.
Όμως παρατηρούμε ότι:

- Αν $x_3 \geqslant 6$ τότε $s(C_3) \geqslant 18$, άτοπο.
- Αν $x_3 = 5$, τότε
$$x_3 + y_3 + z_3 = 9 \Longleftrightarrow y_3 + z_3 = 4$$
  και
$$s(C_3) = 3 \cdot 5 + 2y_3 + z_3 = 15 + (y_3 + z_3) + y_3 = 15 + 4 + y_3 > 18$$
  άτοπο.

Επομένως, $x_3 = 4$. Τότε από την εξίσωση $x_1 + x_2 + x_3 = 9$ έχουμε

$$x_1 + x_2 = 5$$

και αφού $x_1 < x_2 < x_3 = 4$ αποδεικνύεται ότι

$$x_1 = 2, x_2 = 3$$

Έχουμε για το άθροισμα των βαθμών,

$$s(C_1) = 6 + (y_1 + z_1) + y_1 = 6 + (9 - 2) + y_1 = 13 + y_1$$

$$s(C_2) = 3 \cdot 3 + (y_2 + z_2) + y_2 = 9 + (9 - 2) + y_2 = 15 + y_2$$

$$s(C_3) = 3 \cdot 4 + (y_3 + z_3) + y_3 = 12 + (9 - 4) + y_3 = 17 + y_3$$

Αφού $s(C_3) < 18$ παίρνουμε ότι $y_3 = 0$ και

$$y_1 + y_2 = 9$$

Επειδή $s(C_1) > s(C_2) > s(C_3)$ θα έχουμε

$$13 + y_1 > 15 + y_2 > 17 + y_3$$

Άρα παίρνουμε

$$y_1 > 2 + y_2 \text{ και } y_2 > 2 + y_3 = 2 + 0 = 2$$

Επομένως,

$$y_1 > 2 + y_2 \Longrightarrow y_1 + y_2 > 2y_2 + 2 \Longrightarrow 9 - 2 > 2y_2 \Longrightarrow y_2 < \frac{7}{2} \Longrightarrow y_2 \leqslant 3$$

και αφού $y_2 > 2$ θα έχουμε ότι $y_2 = 3$ και

$$y_1 + y_2 = 9 \Longrightarrow y_1 = 6$$

Έτσι παίρνουμε

$$s(C_1) = 3x_1 + 2y_1 + z_1 = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 6 + (9 - 2 - 6) = 6 + 12 + 1 = 19$$

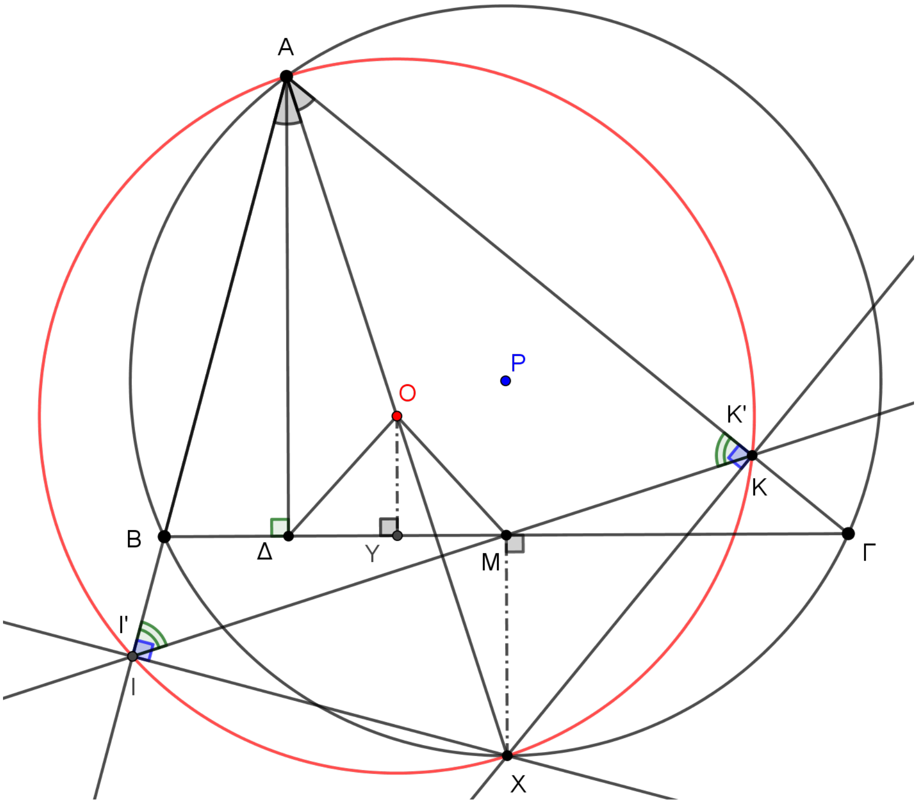
$$s(C_2) = 3x_2 + 2y_2 + z_2 = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + (9 - 3 - 3) = 9 + 6 + 3 = 18$$

$$s(C_3) = 3x_3 + 2y_3 + z_3 = 3(9 - 2 - 3) + 2 \cdot 0 + (9 - 4 - 0) = 12 + 0 + 5 = 17$$

Πρόβλημα 3. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $\triangle AB\varGamma$ με $AB < A\varGamma$ και έστω M το μέσον του $B\varGamma$. Από το σημείο M φέρουμε ευθεία που τέμνει τις ευθείες AB και $A\varGamma$ στα σημεία I και K αντίστοιχα έτσι ώστε $AI = AK$. Αν O το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $\triangle AIK$ και $\varDelta$ το ίχνος της κάθετης από το σημείο A πάνω στην $B\varGamma$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\triangle O\varDelta M$ είναι ισοσκελές.

Προτεινόμενη Λύση.
Φέρουμε τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$ και έστω X το μέσον του τόξου $B\Gamma$. Τότε, αφού το τρίγωνο $\triangle AIK$ είναι ισοσκελές από την υπόθεση θα έχουμε ότι η διχοτόμος της γωνίας $\angle IAK$ θα διέρχεται από το κέντρο O του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $\triangle AIK$. Επίσης όμως η διχοτόμος της γωνίας $\angle BA\Gamma$ διέρχεται από το σημείο X. Επομένως τα σημεία A,O,X είναι συνευθειακά.

Έστω I' και K' οι προβολές του X πάνω στις ευθείες AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Όμως $XM \perp B\Gamma$, άρα το σημείο M είναι η προβολή του X πάνω στην $B\Gamma$. Τότε τα σημεία I',M,K' ανήκουν στην ευθεία Simson του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$. Επιπλέον το τετράπλευρο $AI'XK'$ είναι εγγράψιμο και



έχουμε

$$\angle AI'K' + \angle I'AX = \angle AI'K' + \angle XAK' = \angle AI'K' + \angle XI'K' = 90^\circ$$

Άρα,

$$AX \perp I'K'$$

επίσης αφού η AO είναι διχοτόμος του ισοσκελούς τριγώνου $\angle IAK$ έχουμε $IK \perp AO$. Επομένως $I' = I$ και $K' = K$.Άρα το τετράπλευρο $AIXK$ είναι εγγράψιμο με κέντρο το O.Άρα

$$AO = OX.$$

δηλαδή το σημείο O είναι μέσον του AX.
Έστω Y το μέσον του ΔM. Στο τραπέζιο $A\Delta XM$ το τμήμα OY ενώνει τα μέσα των διαγωνίων του άρα έχουμε $OY \parallel A\Delta \parallel MX$ και επομένως

$$OY \perp \Delta M$$

δηλαδή το OY είναι διάμεσος και ύψος στο τρίγωνο $\triangle O\Delta M$ και άρα το τρίγωνο αυτό είναι ισοσκελές.

Πρόβλημα 4. Αν α,β,γ, θετικοί πραγματικοί αριθμοί, τέτοιοι ώστε

$$2\sqrt{\beta\gamma} + 8\sqrt{\alpha\gamma} + 21\sqrt{\alpha\beta} \leqslant 12$$

τότε να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης:

$$N = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{2}{\sqrt{\beta}} + \frac{3}{\sqrt{\gamma}}$$

Προτεινόμενη Λύση 1η.

Θέτουμε

$$x = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}, y = \frac{2}{\sqrt{\beta}}, z = \frac{3}{\sqrt{\gamma}}$$

επομένως παίρνουμε

$$\sqrt{\alpha} = \frac{1}{x}, \sqrt{\beta} = \frac{2}{y}, \sqrt{\gamma} = \frac{3}{z}$$

και η δεδομένη σχέση γίνεται

$$2 \cdot \frac{2}{y} \cdot \frac{3}{z} + 8 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{3}{z} + 21 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{2}{y} \leqslant 12 \Longrightarrow \frac{2}{yz} + \frac{4}{xz} + \frac{7}{xy} \leqslant 2$$

η διαφορετικά

$$2x + 4y + 7z \leqslant 2xyz \tag{1}$$

και θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε την

$$N = x + y + z$$

Η (1) γίνεται

$$2xyz - 7z \geqslant 2x + 4y \Longleftrightarrow z(2xy - 7) \geqslant 2x + 4y > 0$$

Άρα, $2xy - 7 > 0 \Longleftrightarrow 2xy > 7$ και παίρνουμε

$$z \geqslant \frac{2x + 4y}{2xy - 7}$$

Χρησιμοποιώντας την τελευταία εξίσωση μετασχηματίζουμε την την παράσταση N έτσι ώστε να εμφανίσουμε στον παρονομαστή κλάσματος την παράσταση $2xy - 7$ και να εφαρμόσουμε την ανισότητα Αριθμητικού-Γεωμετρικού Μέσου (AM-GM).Έτσι έχουμε

$$x + y + z \geqslant x + y + \frac{2x + 4y}{2xy - 7} = x + y - \frac{7}{2x} + \frac{7}{2x} + \frac{2x + 4y}{2xy - 7}$$

αλλιώς η τελευταία ανίσωση γίνεται

$$x + y + z \geqslant x + (y - \frac{7}{2x}) + \frac{11}{2x} - \frac{4}{2x} + \frac{2x + 4y}{2xy - 7} = x + (y - \frac{7}{2x}) + \frac{11}{2x} + \frac{2x + 4y}{2xy - 7} - \frac{2}{x}$$

και κάνοντας πράξεις η ανισότητα γράφεται

$$x + y + z \geqslant x + \frac{11}{2x} + \frac{2xy - 7}{2x} + \frac{2x + \frac{14}{x}}{2xy - 7}$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα AM-GM στους δύο τελευταίους όρους του δεύτερου μέλους της ανισότητας θα πάρουμε

$$x + y + z \geqslant x + \frac{11}{2x} + 2\sqrt{\frac{2xy - 7}{2x} \cdot \frac{2x + \frac{14}{x}}{2xy - 7}} = x + \frac{11}{2x} + 2\sqrt{1 + \frac{7}{x^2}} \tag{2}$$

Αποδεικνύουμε ότι

$$4\sqrt{1 + \frac{7}{x^2}} \geqslant 3 + \frac{7}{x}$$

Πράγματι χρησιμοποιώντας την αναλυτική-συνθετική μέθοδο έχουμε διαδοχικά

$$4\sqrt{1 + \frac{7}{x^2}} \geqslant 3 + \frac{7}{x} \Longleftrightarrow 16(1 + \frac{7}{x^2}) \geqslant 9 + \frac{49}{x^2} + \frac{42}{x}$$

ή διαφορετικά

$$\frac{63}{x^2} - \frac{42}{x} + 7 \geqslant 0 \iff 7(\frac{9}{x^2} - \frac{6}{x} + 1) \geqslant 0 \iff 7(\frac{3}{x} - 1)^2 \geqslant 0$$

όπου η τελευταία ανισότητα είναι προφανής. Επομένως η (2) γίνεται

$$x + y + z \geqslant x + \frac{11}{2x} + 2 \cdot \frac{3 + \frac{7}{x}}{4} = x + \frac{11}{2x} + \frac{3}{2} + \frac{7}{2x} = x + \frac{3}{2} + \frac{9}{x}$$

όμως έχουμε

$$x + \frac{9}{x} \geqslant 6 \iff x^2 - 6x + 9 \geqslant 0 \iff (x-2)^2 \geqslant 0$$

επομένως η προηγούμενη ανίσωση γράφεται

$$x + y + z \geqslant \frac{3}{2} + 6 = \frac{15}{2}$$

Η ισότητα ισχύει για

$$x = 3, y = \frac{5}{2}, z = 2$$

Άρα η ελάχιστη τιμή της παράστασης N είναι $\frac{15}{2}$ και επιτυγχάνεται όταν

- $x = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \iff \sqrt{\alpha} = \frac{1}{3} \iff \alpha = \frac{1}{9}$
- $y = \frac{2}{\sqrt{\beta}} \iff \sqrt{\beta} = \frac{4}{5} \iff \beta = \frac{16}{25}$
- $x = \frac{3}{\sqrt{\gamma}} \iff \sqrt{\gamma} = \frac{3}{2} \iff \gamma = \frac{9}{4}$

Πράγματι τότε θα έχουμε

$$N = \frac{1}{\frac{1}{3}} + \frac{2}{\frac{4}{5}} + \frac{3}{\frac{3}{2}} = 3 + \frac{10}{4} + \frac{6}{3} = \frac{15}{2}$$

Προτεινόμενη Λύση 2η.

Η παράσταση N που θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε μετασχηματίζεται ώς εξής

$$N = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{2}{\sqrt{\beta}} + \frac{3}{\sqrt{\gamma}} = \frac{6}{15}(\frac{5}{2\sqrt{\alpha}}) + \frac{5}{15}(\frac{6}{\sqrt{\beta}}) + \frac{4}{15}(\frac{45}{4\sqrt{\gamma}}) = \frac{6(\frac{5}{2\sqrt{\alpha}}) + 5(\frac{6}{\sqrt{\beta}}) + 4(\frac{45}{4\sqrt{\gamma}})}{15}$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα AM-GM θα πάρουμε

$$N = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{2}{\sqrt{\beta}} + \frac{3}{\sqrt{\gamma}} \geqslant \sqrt[15]{\frac{5^6}{2^6(\sqrt{\alpha^6})} \cdot \frac{6^5}{(\sqrt{\beta^5})} \cdot \frac{45^4}{4^4(\sqrt{\gamma^4})}}$$

ή διαφορετικά έχουμε

$$N = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{2}{\sqrt{\beta}} + \frac{3}{\sqrt{\gamma}} \geqslant \frac{5^{\frac{6}{15}} \cdot 6^{\frac{5}{15}} \cdot 9^{\frac{4}{15}} \cdot 5^{\frac{4}{15}}}{2^{\frac{6}{15}} \cdot \alpha^{\frac{6}{30}} \cdot \beta^{\frac{5}{30}} \cdot \gamma^{\frac{4}{30}} \cdot 4^{\frac{4}{15}}} = \frac{5^{\frac{10}{15}} \cdot 3^{\frac{13}{15}}}{2^{\frac{9}{15}} \cdot \alpha^{\frac{6}{30}} \cdot \beta^{\frac{5}{30}} \cdot \gamma^{\frac{4}{30}}} \qquad (3)$$

Η δεδομένη σχέση γράφεται

$$12 \geqslant 21\sqrt{\alpha\beta} + 2\sqrt{\beta\gamma} + 8\sqrt{\alpha\gamma} = \frac{7}{15}(45\sqrt{\alpha\beta}) + \frac{3}{15}(10\sqrt{\beta\gamma}) + \frac{5}{15}(24\sqrt{\alpha\gamma})$$

ή

$$12 \geqslant \frac{7(45\sqrt{\alpha\beta}) + 3(10\sqrt{\beta\gamma}) + 5(24\sqrt{\alpha\gamma})}{15}$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα AM-GM θα πάρουμε

$$12 \geqslant \sqrt[15]{45^7\sqrt{\alpha^7\beta^7}\cdot 10^3\sqrt{\beta^3\gamma^3}\cdot 24^5\sqrt{\gamma^5\alpha^5}}$$

που γράφεται

$$12 \geqslant \sqrt[15]{(3^2\cdot 5)^7\cdot\alpha^{\frac{7}{2}}\cdot\beta^{\frac{7}{2}}\cdot 2^3\cdot 5^3\beta^{\frac{3}{2}}\cdot\gamma^{\frac{3}{2}}\cdot(2^3)^5\cdot 3^5\cdot\gamma^{\frac{5}{2}}\cdot\alpha^{\frac{5}{2}}}$$

ή διαφορετικά

$$12 \geqslant \sqrt[15]{3^{19}\cdot 2^{18}\cdot 5^{10}\cdot\alpha^6\cdot\beta^5\cdot\gamma^4}$$

και γράφοντας υπό μορφή δυνάμεων την τελευταία ανισότητα έχουμε

$$12 \geqslant 3^{\frac{19}{15}}\cdot 2^{\frac{18}{15}}\cdot 5^{\frac{10}{15}}\cdot\alpha^{\frac{6}{15}}\cdot\beta^{\frac{5}{15}}\cdot\gamma^{\frac{4}{15}} \tag{4}$$

Επομένως από τα προηγούμενα (3) και (4) έχουμε

$$12N^2 = 12(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}+\frac{2}{\sqrt{\beta}}+\frac{3}{\sqrt{\gamma}})^2 \geqslant (3^{\frac{19}{15}}\cdot 2^{\frac{18}{15}}\cdot 5^{\frac{10}{15}}\cdot\alpha^{\frac{6}{15}}\cdot\beta^{\frac{5}{15}}\cdot\gamma^{\frac{4}{15}})\cdot(\frac{5^{\frac{10}{15}}\cdot 3^{\frac{13}{15}}}{2^{\frac{9}{15}}\cdot\alpha^{\frac{6}{30}}\cdot\beta^{\frac{5}{30}}\cdot\gamma^{\frac{4}{30}}})^2$$

άρα έχουμε

$$12(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}+\frac{2}{\sqrt{\beta}}+\frac{3}{\sqrt{\gamma}})^2 \geqslant (3^{\frac{19}{15}}\cdot 2^{\frac{18}{15}}\cdot 5^{\frac{10}{15}}\cdot\alpha^{\frac{6}{15}}\cdot\beta^{\frac{5}{15}}\cdot\gamma^{\frac{4}{15}})\cdot(\frac{5^{\frac{20}{15}}\cdot 3^{\frac{26}{15}}}{2^{\frac{18}{15}}\cdot\alpha^{\frac{6}{15}}\cdot\beta^{\frac{5}{15}}\cdot\gamma^{\frac{4}{15}}})$$

δηλαδή,

$$12(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}+\frac{2}{\sqrt{\beta}}+\frac{3}{\sqrt{\gamma}})^2 \geqslant 3^3\cdot 5^2 \Longleftrightarrow (\frac{1}{\sqrt{\alpha}}+\frac{2}{\sqrt{\beta}}+\frac{3}{\sqrt{\gamma}})^2 \geqslant \frac{3^3\cdot 5^2}{2^2\cdot 3} = \frac{3^2\cdot 5^2}{2^2}$$

Άρα τελικά έχουμε

$$N = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}+\frac{2}{\sqrt{\beta}}+\frac{3}{\sqrt{\gamma}} \geqslant \frac{15}{2}$$

Η ισότητα ισχύει όταν οι όροι του αθροίσματος των παραστάσεων

$$N = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}+\frac{2}{\sqrt{\beta}}+\frac{3}{\sqrt{\gamma}} = \frac{6}{15}(\frac{5}{2\sqrt{\alpha}})+\frac{5}{15}(\frac{6}{\sqrt{\beta}})+\frac{4}{15}(\frac{45}{4\sqrt{\gamma}})$$

και

$$\frac{7}{15}(45\sqrt{\alpha\beta})+\frac{3}{15}(10\sqrt{\beta\gamma})+\frac{5}{15}(24\sqrt{\alpha\gamma})$$

είναι ίσοι, δηλαδή

$$\frac{5}{2\sqrt{\alpha}} = \frac{6}{\sqrt{\beta}} = \frac{45}{4\sqrt{\gamma}}$$

και

$$45\sqrt{\alpha\beta} = 10\sqrt{\beta\gamma} = 24\sqrt{\alpha\gamma}$$

καθώς επίσης και

$$21\sqrt{\alpha\beta}+2\sqrt{\beta\gamma}+8\sqrt{\alpha\gamma} = 12$$

Επομένως έχουμε

$$\frac{5}{2\sqrt{\alpha}} = \frac{6}{\sqrt{\beta}} = \frac{45}{4\sqrt{\gamma}} = k$$

Τότε

- $\frac{5}{2\sqrt{\alpha}} = k \Longleftrightarrow \sqrt{\alpha} = \frac{5}{2k}$
- $\frac{6}{\sqrt{\beta}} = k \Longleftrightarrow \sqrt{\beta} = \frac{6}{k}$
- $\frac{45}{4\sqrt{\gamma}} = k \Longleftrightarrow \sqrt{\gamma} = \frac{45}{4k}$

Αντικαθιστώντας στην τρίτη εξίσωση θα έχουμε

$$\frac{21 \cdot 15}{k^2} + \frac{3 \cdot 45}{k^2} + \frac{5 \cdot 45}{k^2} = 12 \Longleftrightarrow k = \frac{15}{2}$$

Άρα έχουμε

- $\sqrt{\alpha} = \frac{5}{2k} = \frac{1}{3} \Longleftrightarrow \alpha = \frac{1}{9}$
- $\sqrt{\beta} = \frac{6}{k} = \frac{4}{5} \Longleftrightarrow \beta = \frac{16}{25}$
- $\sqrt{\gamma} = \frac{45}{4k} = \frac{3}{2} \Longleftrightarrow \gamma = \frac{9}{4}$