Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία

Β′ Διαγωνισμός Επιλογής κάτω των 15 ½ Ετών

«Ευκλείδης»

Ημερομηνία: 03/04/2021 Ώρα Εξέτασης: 10:00-14:30

Οδηγίες

1. Να λύσετε **όλα** τα θέματα, **αιτιολογώντας** πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Πρόβλημα 1. Έστω θετικοί πραγματικοί αριθμοί x,y,z, τέτοιοι ώστε $x^2+y^2+z^2=3$. Να αποδείξετε ότι:

$$xyz(x+y+z)+2021 \geqslant 2024xyz$$

Προτεινόμενη Λύση.
Η δεδομένη ανίσωση γράφεται

$$x+y+z+\frac{2021}{xyz} \geqslant 2024 \Longleftrightarrow x+y+z+\frac{1}{xyz}+\frac{2020}{xyz} \geqslant 2024$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Αριθμητικού-Γεωμετρικού Μέσου (AM-GM) θα έχουμε

$$x+y+z+\frac{1}{xyz} \geqslant 4\sqrt[4]{xyz\frac{1}{xyz}}=4$$

Επίσης από την δεδομένη συνθήκη και την ανισότητα Αριθμητικού-Γεωμετρικού Μέσου (AM-GM) παίρνουμε

$$3=x^2+y^2+z^2 \geqslant 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}$$

άρα από την τελευταία ανισότητα έχουμε

$$xyz \leqslant 1 \Longleftrightarrow \frac{1}{xyz} \geqslant 1 \Longleftrightarrow \frac{2020}{xyz} \geqslant 2020$$

Επομένως προσθέτοντας τις δύο ανισότητες θα έχουμε

$$x+y+z+\frac{1}{xyz}+\frac{2020}{xyz} \geqslant 4+2020=2024$$

Πρόβλημα 2. Να βρείτε όλα τα ζεύγη φυσικών αριθμών (α,β) για τα οποία ισχύει

$$\delta+\Delta=4(\alpha+\beta)+2021$$

όπου δ ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των α,β και Δ το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των α,β.

Προτεινόμενη Λύση.

Αφού $\delta = (\alpha,\beta)$ ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των α,β υπάρχουν ακέραιοι φυσικοί αριθμοί, έστω x,y με $(x,y) = 1$ δηλαδή πρώτοι μεταξύ τους για τους οποίους έχουμε

$$\alpha = \delta x \text{ και } \beta = \delta y$$

Ξέρουμε ότι

$$\Delta \cdot \delta = \alpha\beta \Longrightarrow \Delta \cdot \delta = \delta^2 xy \Longrightarrow \Delta = \delta xy$$

Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $x \geqslant y$. Επομένως η δεδομένη σχέση γράφεται

$$\delta + \delta xy = 4\delta(x+y) + 2021 \Longrightarrow \delta xy - 4\delta x - 4\delta y + \delta = 2021$$

Προσθέτοντας και αφαιρώντας 15δ στην τελευταία ισότητα, έχουμε

$$\delta x(y-4) - 4\delta(y-4) = 2021 + 15\delta \Longrightarrow \delta(x-4)(y-4) = 2021 + 15\delta \tag{1}$$

Τότε το δ διαιρεί το 2021 και επειδή η ανάλυση σε γινόμενο πρώτων αριθμών του 2021 είναι

$$2021 = 43 \cdot 47$$

θα έχουμε ότι,

$$\delta \in \{1,43,47,2021\}$$

Επομένως θα πάρουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- Αν $\delta = 1$ τότε η (1) γράφεται

  $$(x-4)(y-4) = 2036 = 2^2 \cdot 509$$

  Επειδή $(x,y) = 1$ οι αριθμοί $x-4, y-4$ δεν μπορεί να είναι και οι δύο άρτιοι. Άρα διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

  (i) $x - 4 = 2036 \Longrightarrow x = 2040$ και $y - 4 = 1 \Longrightarrow y = 5$ που απορρίπτεται αφού $(x,y) \neq 1$.

  (ii) $x - 4 = 509 \Longrightarrow x = 513$ και $y - 4 = 4 \Longrightarrow y = 8$.
  Επομένως οι λύσεις είναι

  $$(\alpha,\beta) = (513,8), (\alpha,\beta) = (8,513)$$

- Αν $\delta = 43$ τότε η (1) γράφεται

  $$(x-4)(y-4) = 62 = 2 \cdot 31$$

  Άρα διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

  (i) $x - 4 = 62 \Longrightarrow x = 66$ και $y - 4 = 1 \Longrightarrow y = 5$.
  Επομένως οι λύσεις είναι

  $$(\alpha,\beta) = (2838,215), (\alpha,\beta) = (215,2838)$$

  (ii) $x - 4 = 31 \Longrightarrow x = 35$ και $y - 4 = 2 \Longrightarrow y = 6$.
  Επομένως οι λύσεις είναι

  $$(\alpha,\beta) = (1505,258), (\alpha,\beta) = (258,1505)$$

- Αν $\delta = 47$ τότε η (1) γράφεται

  $$(x-4)(y-4) = 58 = 2 \cdot 29$$

Άρα διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

(i) $x-4=58 \Longrightarrow x=62$ και $y-4=1 \Longrightarrow y=5$.
Επομένως οι λύσεις είναι

$$(\alpha,\beta)=(2914,235), (\alpha,\beta)=(235,2914)$$

(ii) $x-4=29 \Longrightarrow x=33$ και $y-4=2 \Longrightarrow y=6$.
Επομένως οι λύσεις είναι

$$(\alpha,\beta)=(1551,282), (\alpha,\beta)=(282,1551)$$

- Αν $\delta=2021$ τότε η (1) γράφεται

$$(x-4)(y-4)=16$$

τότε $x-4=1 \Longrightarrow x=5$ και $y-4=16 \Longrightarrow y=20$ που απορρίπτεται.

Πρόβλημα 3. Δίνεται ρόμβος $AB\varGamma\varDelta$.

(α) Να αποδείξετε ότι μπορείτε να κατασκευάσετε ένα κύκλο (c) που να είναι εγγεγραμμένος στον ρόμβο και να εφάπτεται των πλευρών του.

(β) Τα σημεία $\varTheta,H,K,I$ βρίσκονται πάνω στις πλευρές $\varDelta\varGamma,B\varGamma,AB,A\varDelta$ του ρόμβου αντίστοιχα, έτσι ώστε τα ευθύγραμμα τμήματα KH και $I\varTheta$ να είναι εφαπτόμενα στον κύκλο (c). Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο που ορίζεται από τα σημεία $\varTheta,H,K,I$ είναι τραπέζιο.

Προτεινόμενη Λύση.

(α) Ξέρουμε ότι οι διαγώνιοι του ρόμβου είναι και διχοτόμοι των γωνιών του. Ονομάζουμε το σημείο τομής των διαγωνίων του ρόμβου με O. Από το σημείο O φέρουμε τις ορθές προβολές του πάνω στις πλευρές του ρόμβου έστω A_1,A_2,A_3 και A_4.Τότε όλες οι αποστάσεις του O από τις πλευρές του ρόμβου είναι ίσες

$$OA_1=OA_2=OA_3=OA_4=d$$

Επομένως ο κύκλος (c) με κέντρο το O και ακτίνα $R=d$ θα εφάπτεται στις πλευρές του ρόμβου και θα είναι εγγεγραμμένος σε αυτόν.

(β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $IK \parallel H\Theta$. Παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα $\triangle IAK$ και $\triangle\Theta\Gamma H$ έχουν δύο ζευγάρια παραλλήλων πλευρών

$$AK \parallel \Theta\Gamma \text{ και } AI \parallel \Gamma H$$

Άρα για να αποδείξουμε την παραλληλία των τρίτων πλευρών αυτών των τριγώνων αρκεί να αποδείξουμε ότι αυτά είναι όμοια.

Επειδή

$$\angle\Delta AB=\angle\Delta\Gamma B$$

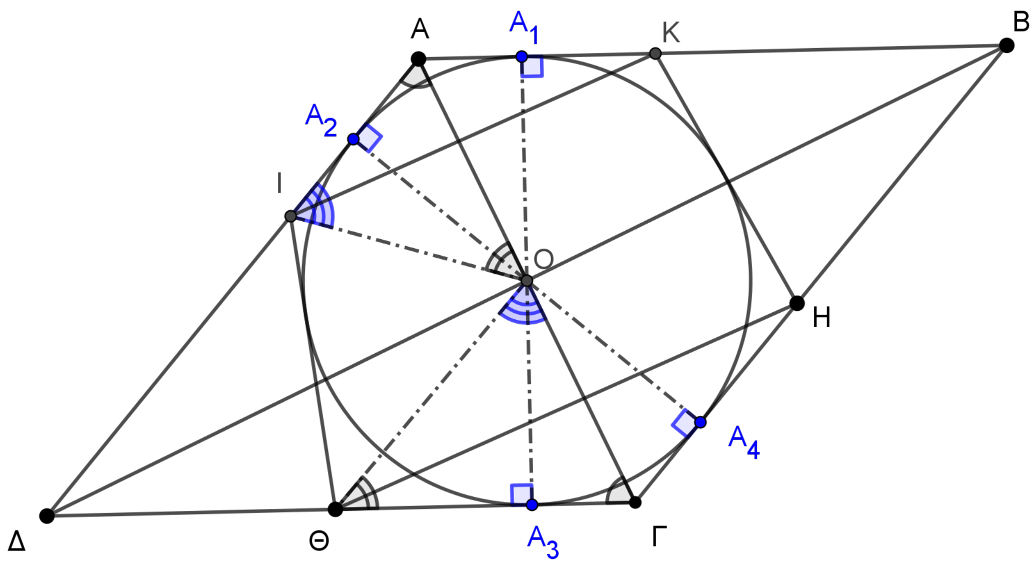
αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\frac{AK}{AI}=\frac{\Theta\Gamma}{\Gamma H}$$

ή διαφορετικά

$$AK\cdot\Gamma H=AI\cdot\Theta\Gamma$$

Έστω, $\angle\Delta A\Gamma=\angle\Delta\Gamma A=x$, $\angle\Delta A\Theta=2y$ και $\angle\Gamma\Theta I=2z$.



Από το τετράπλευρο $AI\Theta\Gamma$ έχουμε,

$$2x + 2y + 2z = 360^\circ \Longrightarrow x + y + z = 180^\circ$$

Οι ευθείες IO και ΘO είναι διακεντρικές ευθείες και λόγω των εφαπτόμενων τμημάτων οι ευθείες IO και ΘO είναι διχοτόμοι των γωνιών $\angle AI\Theta$ και $\angle I\Theta\Gamma$ αντίστοιχα. Επομένως έχουμε

$$\angle AIO = \angle OI\Theta = y$$

και

$$\angle I\Theta O = \angle O\Theta\Gamma = z$$

Στο τρίγωνο $\triangle AOI$ έχουμε

$$\angle AOI = 180^\circ - y - x = z$$

άρα

$$\triangle AOI \sim \triangle \Gamma\Theta O$$

Επομένως έχουμε

$$\frac{AO}{\Gamma\Theta} = \frac{AI}{\Gamma O} \Longrightarrow \Gamma\Theta \cdot AI = AO \cdot \Gamma O$$

Ομοίως αποδεικνύουμε ότι

$$\Gamma H \cdot AK = AO \cdot \Gamma O$$

άρα από τις τελευταίες σχέσεις θα έχουμε

$$AK \cdot \Gamma H = AI \cdot \Theta\Gamma$$

Επομένως από την ομοιότητα των τριγώνων $\triangle IAK$ και $\triangle \Theta\Gamma H$ θα έχουμε $IK \parallel H\Theta$ και άρα τα σημεία Θ,H,K,I ορίζουν τραπέζιο.

Πρόβλημα 4. Χρωματίζουμε κάθε τετραγωνάκι μιας 4×19 σκακιέρας με ένα από τα χρώματα κόκκινο, πράσινο και μπλε. Να αποδείξετε πως όπως και να γίνει αυτός ο χρωματισμός, μπορούμε να βρούμε δυο οριζόντιες σειρές και δυο κάθετες στήλες, ώστε τα 4 τετραγωνάκια που βρίσκονται στις τομές αυτών των δύο σειρών και των δύο στηλών να έχουν όλα το ίδιο χρώμα.

Προτεινόμενη Λύση.

Επειδή κάθε στήλη έχει 4 τετράγωνα, θα έχει τουλάχιστον 2 τετράγωνα του ίδιου χρώματος. Θα ονομάζουμε την στήλη κόκκινη αν έχει τουλάχιστον δύο κόκκινα τετράγωνα και θα ονομάζουμε μια στήλη πράσινη αν έχει τουλάχιστον δύο πράσινα τετράγωνα. Κάποια στήλη μπορεί να είναι για παράδειγμα και κόκκινη και πράσινη αλλά σε κάθε περίπτωση επειδή έχουμε

$$19 = 3 \cdot\ 6 + 1$$

στήλες και έχουμε μόνο τρία χρώματα, θα υπάρχουν 7 στήλες που τους δώσαμε το ίδιο όνομα, έστω κόκκινες.

Από κάθε μια από αυτές τις στήλες παίρνουμε δύο κόκκινα τετραγωνάκια.Αυτά μπορεί να είναι στις σειρές $1{,}2$ ή $1{,}3$, ή $3{,}4$.

Συνολικά έχουμε 6 περιπτώσεις και 7 στήλες. Άρα σε τουλάχιστον δύο από τις στήλες οι δύο σειρές είναι ακριβώς ίδιες.

Αυτές οι δύο στήλες και οι δύο σειρές μας δίνουν το ζητούμενο.