ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΚΥΤΑΛΟΔΡΟΜΙΑ 2020

ΓΙΑ ΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ

Παρασκευή 31 Ιανουαρίου 2020 – ΛΕΥΚΩΣΙΑ

Τάξη: Α΄ Γυμνασίου

ΣΥΝΕΡΓΑΣΙΑ

ΣΧΟΛΕΙΟ…………………………………………………………………..

Ώρα έναρξης 10:15	Ώρα λήξης 10:30	Ώρα παράδοσης

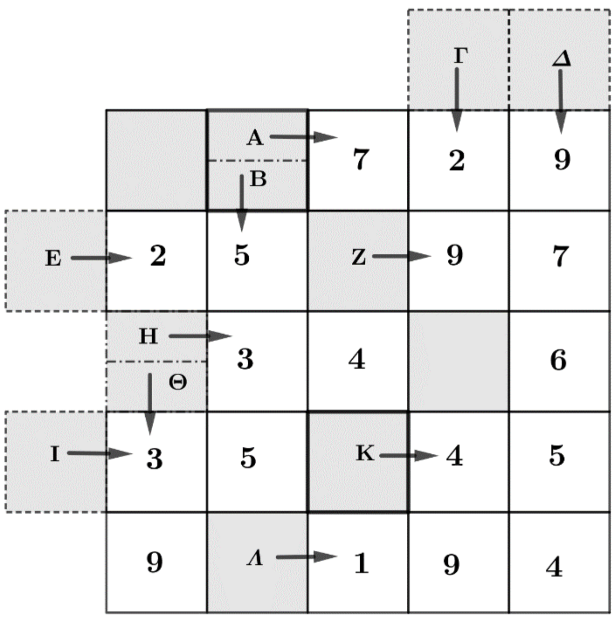
ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Να συμπληρώσετε στο σχήμα τα μη σκιασμένα τετραγωνάκια, ακολουθώντας τις οδηγίες που δίνονται πιο κάτω. Κάθε μη σκιασμένο τετραγωνάκι συμπληρώνεται με ένα ψηφίο. Τα βέλη δείχνουν πού πρέπει να συμπληρωθεί η κάθε οδηγία. Σε κάθε οδηγία, το πρώτο τετραγωνάκι δεν μπορεί να συμπληρώνεται με το ψηφίο 0 (μηδέν). Η λύση είναι μοναδική.

Οδηγίες:

$\boldsymbol{A}$: Έκτη δύναμη φυσικού αριθμού
$\boldsymbol{B}$: Ίσο με $\boldsymbol{A-\Lambda}$
$\boldsymbol{\Gamma}$: Αν προσθέσουμε 7, προκύπτει τέλειο τετράγωνο
$\boldsymbol{\Delta}$: Διαφορετικά ψηφία σε φθίνουσα σειρά (ή διάταξη;)
$\boldsymbol{E}$: Τέλειο τετράγωνο
$\boldsymbol{Z}$: Πρώτος αριθμός
$\boldsymbol{H}$: Ίσο με $\boldsymbol{I-1}$
$\boldsymbol{\Theta}$: Πολλαπλάσιο του 13
$\boldsymbol{K}$: Όταν διαιρεθεί με το 11, αφήνει υπόλοιπο 1
$\boldsymbol{\Lambda}$: Διπλάσιο του $\boldsymbol{Z}$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ



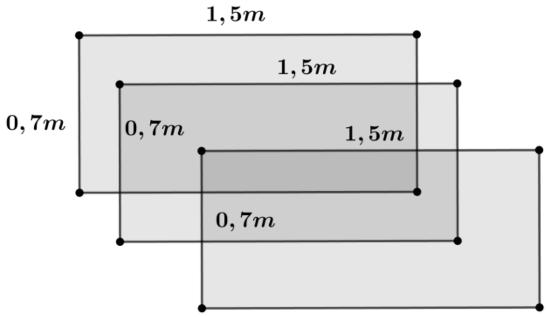
ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΚΥΤΑΛΟΔΡΟΜΙΑ 2020
ΓΙΑ ΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ
Παρασκευή 31 Ιανουαρίου 2020 – ΛΕΥΚΩΣΙΑ
Τάξη: Β΄ Γυμνασίου

ΣΥΝΕΡΓΑΣΙΑ

ΣΧΟΛΕΙΟ………………………………………………………………..

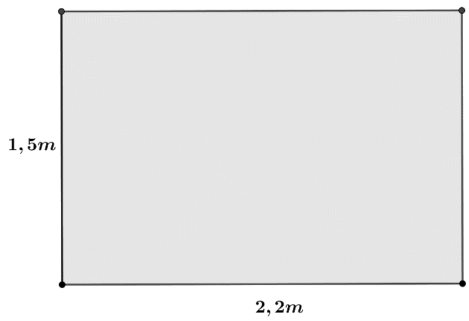
Ώρα έναρξης	Ώρα λήξης 11:00	Ώρα παράδοσης

<u>ΠΡΟΒΛΗΜΑ</u>



Δύο ξυλουργοί εργάζονται για μια κατασκευή.
Ο πρώτος ξυλουργός έχει στην διάθεσή του τρείς ορθογώνιες πλάκες ξύλου διαστάσεων η κάθε μια $0{,}7\ m$ πλάτος και $1{,}5\ m$ μήκος.

Ο δεύτερος ξυλουργός έχει στην διάθεσή του μια ορθογώνια πλάκα ξύλου διαστάσεων $1{,}5\ m$ πλάτος και $2{,}2\ m$ μήκος.



Και οι δύο θέλουν να κόψουν από τις πλάκες τους, για την κατασκευή που θα κάνουν, όσο το δυνατόν περισσότερα ορθογώνια κομμάτια ξύλου διαστάσεων $0{,}3\ m$ πλάτος και $0{,}5\ m$ μήκος.

- **i.** Να βρείτε πόσα το πολύ ορθογώνια κομμάτια ξύλου διαστάσεων $0{,}3\ m$ πλάτος και $0{,}5\ m$ μήκος μπορεί να κόψει από τις τρείς πλάκες του ο πρώτος ξυλουργός.
  Να εξηγήσετε πλήρως, κάνοντας σχήμα για τη μια πλάκα, με ποιόν τρόπο μπορεί να γίνει αυτό.
- **ii.** Να βρείτε πόσα το πολύ ορθογώνια κομμάτια ξύλου διαστάσεων $0{,}3\ m$ πλάτος και $0{,}5\ m$ μήκος μπορεί να κόψει από την δική του πλάκα ο δεύτερος ξυλουργός.
  Να εξηγήσετε πλήρως, κάνοντας σχήμα, με ποιόν τρόπο μπορεί να γίνει αυτό.

<u>ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ</u>

I. Το εμβαδόν της μιας ορθογώνιας πλάκας του πρώτου ξυλουργού έχει εμβαδόν

$$70cm \times 150cm = 10500cm^2$$

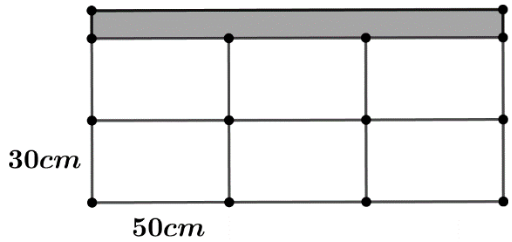
Το εμβαδόν του κάθε κοματιού που θέλει να κόψει έχει εμβαδόν

$$30cm \times 50cm = 1500cm^2$$

Επομένως μπορεί να κόψει το πολύ $10500 \div 1500 = 7$ ορθογώνια κομμάτια διαστάσεων $0{,}3\ m$ πλάτος και $0{,}5\ m$ μήκος.
Δεν είναι όμως δυνατόν από μια ορθογώνια πλάκα να κόψει 7 ορθογώνια κομμάτια διαστάσεων $0{,}3\ m$ πλάτος και $0{,}5\ m$ μήκος. Πράγματι αν αυτό ήταν δυνατόν τότε η πλευρά των $70cm$ της πλάκας θα καλύπτονταν από τμήματα των $30cm\ και\ 50cm$. Αφού όμως το 70 δεν διαιρείται ακριβώς με το 30 τότε τουλάχιστον ένα τμήμα για να καλυφθεί η πλευρά των $70cm$ της πλάκας, θα ήταν των $50cm$ (στην περίπτωσή μας εδώ θα έχουμε ένα τέτοιο τμήμα). Τότε το υπόλοιπο που μένει είναι $70 - 30 = 20cm$ που δεν μπορεί να καλυφθεί από κομμάτι μήκους $30cm$.
Αφού δεν μπορεί να κόψει 7 ορθογώνια κομμάτια διαστάσεων $0{,}3\ m$ πλάτος και $0{,}5\ m$ μήκος τότε ο αριθμός που μπορεί να κόψει είναι το πολύ 6 . Επομένως από τις τρείς πλάκες μπορεί να κόψει 18 ορθογώνια κομμάτια
Αν αφαιρέσουμε από την μια πλάκα ξύλου του πρώτου ξυλουργού μια λωρίδα με εμβαδόν

$$10cm \times 150cm = 1500cm^2$$

θα μείνει ένα ορθογώνιο με διαστάσεις $60cm \times 150cm$ που όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα εύκολα μπορούμε να κόψουμε 6 ορθογώνια κομμάτια όπως τα θέλουμε.



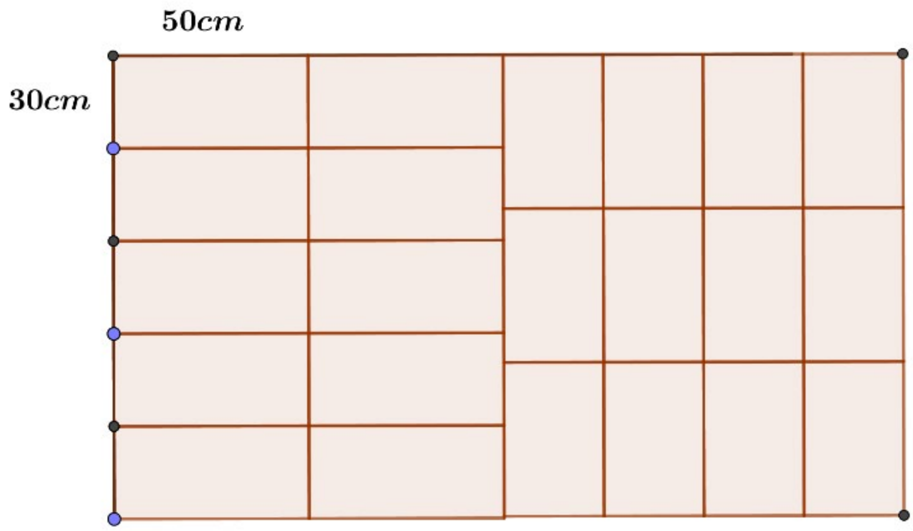
II. Το εμβαδόν της ορθογώνιας πλάκας του δεύτερου ξυλουργού έχει εμβαδόν

$$150cm \times 220cm = 33000cm^2$$

Το εμβαδόν του κάθε κομματιού που θέλει να κόψει έχει εμβαδόν

$$30cm \times 50cm = 1500cm^2$$

Επομένως μπορεί να κόψει το πολύ $33000 \div 1500 = 22$ ορθογώνια κομμάτια διαστάσεων $0{,}3\ m$ πλάτος και $0{,}5\ m$ μήκος.
Πως μπορεί να κόψει 22 ορθογώνια κομμάτια, φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



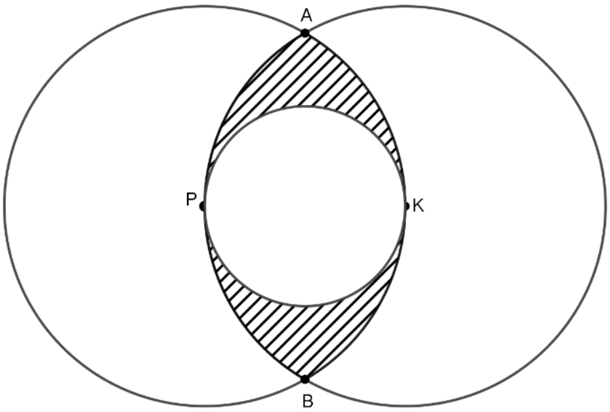
	ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ ***ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΚΥΤΑΛΟΔΡΟΜΙΑ 2020*** ***ΓΙΑ ΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ*** ***Παρασκευή 31 Ιανουαρίου 2020 – ΛΕΥΚΩΣΙΑ*** ***Τάξη: Γ΄ Γυμνασίου***	ΣΥΝΕΡΓΑΣΙΑ

ΣΧΟΛΕΙΟ……………………………………………………………..

Ώρα έναρξης	Ώρα λήξης 11:45	Ώρα παράδοσης

<u>ΠΡΟΒΛΗΜΑ</u>

Στο πάτωμα μιας αίθουσας υπάρχει μια διακοσμητική κατασκευή, που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Το σκιασμένο μέρος της κατασκευής θα επενδυθεί με μάρμαρο, που κοστίζει €500 ανά $1m^2$ και το οποίο θα περικλείεται από πολύ λεπτό επιχρυσωμένο κορδόνι, που κοστίζει €30 ανά $1m$.



Τα σημεία P και K είναι τα κέντρα των δύο ίσων κύκλων με $PK = 1m$.
Η PK είναι διάμετρος ενός μικρότερου κύκλου, που εφάπτεται εσωτερικά στους δύο ίσους κύκλους. Αν A και B είναι τα σημεία τομής των δύο ίσων κύκλων, να βρείτε:
(α) Το μέτρο της γωνίας $\angle APB$
(β) Το είδος και το εμβαδόν του τετραπλεύρου $APBK$
(γ) Το συνολικό κόστος του μαρμάρου για την επένδυση συμπεριλαμβανομένου του κορδονιού που το περικλείει.

<u>ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ</u>

(α) Έχουμε από την υπόθεση ότι

$$PA = PB = KB = KA = PK = 1m \qquad (1)$$

Επομένως θα έχουμε ότι τα τρίγωνα

$$\varDelta APK, \varDelta KPB$$

είναι ισόπλευρα.
Άρα παίρνουμε

$$\angle APK = \angle KPB = 60°$$

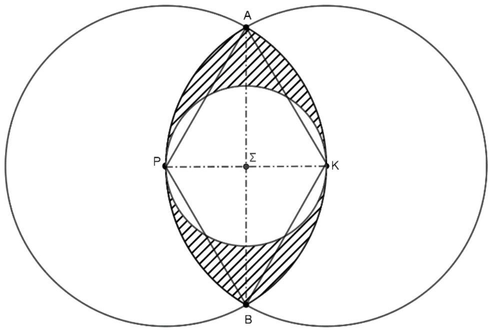
Δηλαδή, $\angle APB = 120°$.

(β) Από την (1) συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο $APBK$ είναι ρόμβος πλευράς $1m$. Άρα οι διαγώνιοι PK, AB τέμνονται κάθετα και διχοτομούνται, έστω στο σημείο Σ.
Από το ορθογώνιο τρίγωνο $\varDelta A\Sigma K$ θα πάρουμε

$$A\Sigma^2 + \Sigma K^2 = AK^2 \text{ ή } A\Sigma^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \text{ ή } A\Sigma^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \text{ ή } A\Sigma = \frac{\sqrt{3}}{2}m$$

Άρα

$$AB = 2A\Sigma = \sqrt{3}\,m$$



Επομένως,

$$E_{\rho\acute{o}\mu\beta o\upsilon} = \frac{AB \cdot PK}{2} = \frac{\sqrt{3} \cdot 1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} m^2$$

(γ) $E_{\sigma\kappa\iota\alpha\sigma\mu\acute{\varepsilon}\nu o\upsilon\ \mu\acute{\varepsilon}\rho o\upsilon\varsigma} = 2E_{\kappa\upsilon\kappa\lambda\iota\kappa o\acute{\upsilon}\ \tau\mu\acute{\eta}\mu\alpha\tau o\varsigma\ AKBA} - E_{\kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\upsilon} =$

$$2\left[E_{\kappa\upsilon\kappa\lambda\iota\kappa o\acute{\upsilon}\ \tau o\mu\acute{\varepsilon}\alpha\ P.AKB} - E_{\Delta APB}\right] - E_{\kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\upsilon} =$$

$$2E_{\kappa\upsilon\kappa\lambda\iota\kappa o\acute{\upsilon}\ \tau o\mu\acute{\varepsilon}\alpha\ P.AKB} - E_{\rho\acute{o}\mu\beta o\upsilon} - E_{\kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\upsilon} = \frac{2\pi \cdot 1^2 \cdot 120°}{360°} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 =$$

$$\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0{,}44 m^2$$

Η περίμετρος του σκιασμένου χωρίου είναι

$$\Pi_{\sigma\kappa\iota\alpha\sigma\mu\acute{\varepsilon}\nu o\upsilon} = 2\gamma_{AKB} + \Gamma_{\kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\upsilon} = 2\frac{\pi \cdot 1 \cdot 120°}{180°} + 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \frac{4\pi}{3} + \pi = \frac{7\pi}{3} \cong 7{,}33m$$

Επομένως το συνολικό κόστος του μαρμάρου και της επένδυσης θα είναι

$$K\acute{o}\sigma\tau o\varsigma = 0{,}44 \cdot 500 + 7{,}33 \cdot 30 = 220 + 219{,}9 = 439{,}9 \cong 440\ \varepsilon\upsilon\rho\acute{\omega}.$$