ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2026

ΣΤ' ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Ημερομηνία: 07/11/2026 *Ώρα Εξέτασης: 10:00-12:00*

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

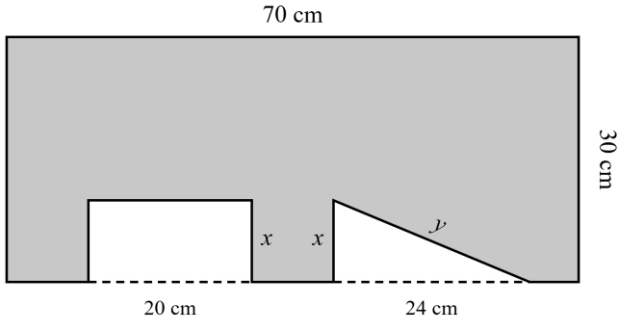
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1

Από ορθογώνιο χαρτί διαστάσεων $70\ cm \times 30\ cm$ αφαιρούνται, ένα ορθογώνιο με βάση $20\ cm$ και ένα ορθογώνιο τρίγωνο με βάση $24\ cm$, που έχουν το ίδιο άγνωστο ύψος x όπως φαίνεται στο σχήμα. Το εμβαδόν του σχήματος που απέμεινε είναι $1780\ cm^2$.

α) Υπολογίστε το ύψος x στα κομμάτια που αφαιρούνται;

β) Θεωρώντας ότι η πλευρά y του τριγώνου που αφαιρέσαμε είναι $26\ cm$ να υπολογίσετε την περίμετρο του σχήματος που απέμεινε.



Προτεινόμενη λύση

α) Υπολογισμός του ύψους x

Βήμα 1: Εμβαδόν ολόκληρου του χαρτιού:

$$E_{χαρτιού} = 70 \cdot 30 = 2100\ cm^2$$

Βήμα 2: Το εμβαδόν που αφαιρέθηκε είναι η διαφορά του αρχικού εμβαδού από το εμβαδόν που απέμεινε:

$$E_{αφαιρεθέντων} = 2100 - 1780 = 320\ cm^2$$

Βήμα 3: Εμβαδά των κομματιών που αφαιρέθηκαν (και τα δύο έχουν ύψος x):

• Ορθογώνιο: E_1 = (βάση) · (ύψος) = 20 · x = 20x

• Ορθογώνιο τρίγωνο: E_2 = (βάση · ύψος)/2 = (24 · x)/2 = 12x

Βήμα 4: Σχηματίζουμε και λύνουμε την εξίσωση:

$$20x + 12x = 320$$

32x = 320

x = 320 / 32 = 10

Απάντηση α): x = 10 cm

β) Περίμετρος του σχήματος που απέμεινε (δίνεται y = 26 cm)

(Ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα, $10^2 + 24^2 = 100 + 576 = 676 = 26^2$, άρα το y = 26 cm είναι συνεπές)

Η περίμετρος είναι το μήκος ολόκληρου του περιγράμματος του γκρίζου σχήματος. Το διακεκομμένο τμήμα της βάσης (20 cm και 24 cm) δεν ανήκει στο περίγραμμα, γιατί εκεί έχει αφαιρεθεί χαρτί. Ξεκινάμε από το πάνω μέρος και διατρέχουμε το περίγραμμα:

• Πάνω πλευρά: 70 cm

• Αριστερή και δεξιά πλευρά: 30 + 30 = 60 cm

• Κάτω πλευρά, τα τμήματα που έμειναν: 70 − 20 − 24 = 26 cm (ένα τμήμα αριστερά, ένα ανάμεσα στα δύο κομμάτια και ένα δεξιά)

• Γύρω από το ορθογώνιο που αφαιρέθηκε (εσωτερικές πλευρές): x + 20 + x = 10 + 20 + 10 = 40 cm

• Γύρω από το τρίγωνο που αφαιρέθηκε: κάθετη πλευρά x = 10 cm και υποτείνουσα y = 26 cm, δηλαδή 36 cm

Π = 70 + 60 + 26 + 40 + 36 = 232 cm

Απάντηση β): Π = 232 cm

Πρόβλημα 2

α) Να υπολογίσετε την παράσταση:

$$\kappa = \left(2 - \frac{2}{3}\right) \times \left(2 - \frac{3}{4}\right) \times \cdots \times \left(2 - \frac{10}{11}\right)$$

β) Σε τρίγωνο ΑΒΓ με εμβαδόν $90\ cm^2$, το Δ είναι εσωτερικό σημείο της ΒΓ και το Ε εσωτερικό σημείο της ΑΔ έτσι ώστε να ισχύουν οι σχέσεις:

$$\Delta\Gamma = 4 \times B\Delta, \quad \Delta E = 2 \times AE$$

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΕΔΓ.

γ) Να υπολογίσετε το κλάσμα λ,

$$\lambda = \frac{7 + 14 + 21 + \cdots + 70}{21 + 42 + 63 + \cdots + 210}$$

και το εμβαδόν του μέρους του τριγώνου ΕΔΓ που αντιστοιχεί στο κλάσμα αυτό.

Προτεινόμενη λύση

προτεινόμενη λύση

α) Μετατρέπουμε κάθε παρένθεση σε κλάσμα. Οι ενδιάμεσοι παράγοντες απλοποιούνται:

$$\kappa = \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} \times \cdots \times \frac{12}{11} = \frac{12}{3} = 4$$

β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ έχουν κοινό ύψος από το Α προς τη ΒΓ. Οι βάσεις τους έχουν λόγο 1 προς 4, άρα και τα εμβαδά τους. Το ΑΔΓ καταλαμβάνει τα τέσσερα πέμπτα του ΑΒΓ:

$$Εμβαδόν\ A\Delta\Gamma = 90 \times \frac{4}{5} = 72$$

Τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΕΔΓ έχουν κοινό ύψος από το Γ προς την ΑΔ. Επειδή το ΔΕ είναι διπλάσιο του ΑΕ, το ΕΔΓ καταλαμβάνει τα δύο τρίτα του ΑΔΓ:

$$Εμβαδόν\ E\Delta\Gamma = 72 \times \frac{2}{3} = 48$$

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι 48 cm².

γ) Κάθε όρος του παρονομαστή είναι τριπλάσιος από τον αντίστοιχο όρο του αριθμητή. Επομένως:

$$\lambda = \frac{1}{3}, \quad 48 \times \frac{1}{3} = 16$$

Το μέρος που ζητείται έχει εμβαδόν 16 cm².

Πρόβλημα 3

Δύο παίκτες, ο Γιάννης και ο Νίκος, παίζουν ένα παιχνίδι με 20 βόλους που βρίσκονται σε ένα τραπέζι. Οι κανόνες του παιχνιδιού είναι οι εξής:

- Οι παίκτες παίζουν εναλλάξ (πρώτα ο ένας και μετά ο άλλος).
- Κάθε φορά, ένας παίκτης μπορεί να αφαιρέσει ή 1, ή 2, ή 3 βόλους από το τραπέζι (δεν μπορεί να πάρει κανέναν ή περισσότερους από 3).
- Χάνει ο παίκτης που θα αναγκαστεί να πάρει τον τελευταίο βόλο που έχει απομείνει στο τραπέζι.

Αν ο Γιάννης παίζει πρώτος, πόσους βόλους πρέπει να αφαιρέσει στην πρώτη του κίνηση και ποια στρατηγική πρέπει να ακολουθήσει στη συνέχεια, ώστε να είναι σίγουρος ότι θα κερδίσει, ό,τι κι αν κάνει ο Νίκος. Δώσε μια στρατηγική νίκης.

Προτεινόμενη Λύση

1ο βήμα: Πρώτη κίνηση

Το μυστικό της στρατηγικής είναι ότι ο Γιάννης πρέπει να αφήνει πάντα έναν αριθμό βόλων που είναι κατά 1 μεγαλύτερος από ένα πολλαπλάσιο του 4.

Γι’ αυτό, στην πρώτη του κίνηση παίρνει **3 βόλους**, ώστε να μείνουν:

$20 - 3 = 17$ βόλοι ($17 = 4 \times 4 + 1$).

2ο βήμα: Στρατηγική νίκης

Στη συνέχεια, ο Γιάννης φροντίζει να αφαιρούνται συνολικά **4 βόλοι** σε κάθε γύρο:

- Αν ο Νίκος πάρει 1, ο Γιάννης παίρνει 3.
- Αν ο Νίκος πάρει 2, ο Γιάννης παίρνει 2.
- Αν ο Νίκος πάρει 3, ο Γιάννης παίρνει 1.

Έτσι, μετά από κάθε κίνηση του Γιάννη, απομένουν διαδοχικά:

17 → 13 → 9 → 5 → 1 βόλος

Όλοι αυτοί οι αριθμοί είναι κατά 1 μεγαλύτεροι από ένα πολλαπλάσιο του 4.

Απάντηση:

Ο Γιάννης παίρνει πρώτα **3 βόλους** και στη συνέχεια συμπληρώνει κάθε φορά 4 βόλους μαζί με τον Νίκο. Έτσι, ανεξάρτητα από τις κινήσεις του Νίκου, θα του αφήσει στο τέλος **1 βόλο**, τον οποίο ο Νίκος θα αναγκαστεί να πάρει και θα χάσει.

Πρόβλημα 4

Ο Γιώργος εκτελεί ένα έργο μόνος του σε 12 ώρες, ενώ ο Χρήστος εκτελεί το ίδιο έργο μόνος του σε 8 ώρες.

α) Αν εργαστούν μαζί σε πόσες ώρες θα το τελειώσουν;

β) Αν ο Χρήστος έφτασε αργότερα και άρχισε να εργάζεται 90 λεπτά μετά την έναρξη της εργασίας από τον Γιώργο, να βρεθεί σε πόσο χρόνο μετά την άφιξη του Χρήστου θα ολοκληρωθεί το έργο και τι μέρος αυτού εκτέλεσε ο καθένας τους.

Προτεινόμενη Λύση

α) Αν εργαστούν μαζί

Ο Γιώργος σε 1 ώρα εκτελεί το 1/12 του έργου και ο Χρήστος το 1/8.

Μαζί σε 1 ώρα εκτελούν:

1/12 + 1/8 = 2/24 + 3/24 = 5/24 του έργου.

Άρα ο χρόνος που χρειάζονται είναι:

1 ÷ 5/24 = 24/5 = 4,8 ώρες.

Απάντηση α): 4 ώρες και 48 λεπτά.

β) Αν ο Χρήστος αρχίσει 90 λεπτά αργότερα

Τα 90 λεπτά είναι 1,5 ώρα.

Στο διάστημα αυτό ο Γιώργος εκτελεί:

1,5 ÷ 12 = 1/8 του έργου.

Επομένως, απομένουν:

1 − 1/8 = 7/8 του έργου.

Αφού μαζί εκτελούν τα 5/24 του έργου σε 1 ώρα, ο χρόνος που χρειάζονται για το υπόλοιπο είναι:

7/8 ÷ 5/24 = 7/8 × 24/5 = 21/5 = 4,2 ώρες.

Δηλαδή **4 ώρες και 12 λεπτά** μετά την άφιξη του Χρήστου.

Μέρος του έργου που εκτέλεσε ο καθένας:

Ο Γιώργος εργάστηκε συνολικά:

1,5 + 4,2 = 5,7 ώρες.

Εκτέλεσε: 5,7 ÷ 12 = **19/40 του έργου**.

Ο Χρήστος εργάστηκε 4,2 ώρες.

Εκτέλεσε: 4,2 ÷ 8 = **21/40 του έργου**.

Απάντηση β): Το έργο ολοκληρώνεται 4 ώρες και 12 λεπτά μετά την άφιξη του Χρήστου. Ο Γιώργος εκτέλεσε τα **19/40** και ο Χρήστος τα **21/40** του έργου.