# ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

**Β' ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ**

## «Ευκλείδης»

**Ημερομηνία: 10/02/2019** **Ώρα εξέτασης: 10:00-14:30**

**ΟΔΗΓΙΕΣ:**

1. Να λύσετε **όλα** τα θέματα **αιτιολογώντας** πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού (Tipp-ex).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

***Πρόβλημα 1:*** Ορίζουμε τις ακολουθίες $(\alpha_\nu), (\beta_\nu), (\gamma_\nu)$ με $\nu \in \{1, 2, 3, \dots\}$ ως εξής:

- $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_{\nu+1} = 2^{\alpha_\nu}$ , $\forall \nu \in \{1, 2, 3, \dots\}$
- $\beta_1 = 3$ και $\beta_{\nu+1} = 3^{\beta_\nu}$ , $\forall \nu \in \{1, 2, 3, \dots\}$
- $\gamma_1 = 4$ και $\gamma_{\nu+1} = 4^{\gamma_\nu}$ , $\forall \nu \in \{1, 2, 3, \dots\}$

Να αποδείξετε ότι $\beta_{2019} > \alpha_{2020} > \gamma_{2018}$

***Πρόβλημα 2 :*** Να βρείτε όλους τους πρώτους αριθμούς $p$, ώστε ο αριθμός

$$1^{p^3+p+1} + 2^{p^3+p+1} + \cdots + 2019^{p^3+p+1}$$

να είναι πολλαπλάσιο του $p$.

***Πρόβλημα 3 :*** Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο $O$, και $A\Delta$ το ύψος του (το σημείο $\Delta$ είναι το ίχνος του ύψους πάνω στην $B\Gamma$). Έστω $T$ το σημείο τομής της $\Gamma O$ με την $A\Delta$. Θεωρούμε $N, M$ τα μέσα των τμημάτων $AT$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Φέρουμε την ευθεία $NO$ και ονομάζουμε $\Theta$ το σημείο τομής της με την $B\Gamma$. Αν $K, O_1$ τα κέντρα των περιεγραμμένων κύκλων των τριγώνων $\triangle B\Gamma M, \triangle BO\Theta$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $KO_1 \perp AB$.

***Πρόβλημα 4 :*** Σε μια τάξη 10 μαθητών δόθηκε ένα διαγώνισμα 15 προβλημάτων. Γνωρίζουμε ότι κάθε πρόβλημα λύθηκε σωστά από τουλάχιστον 7 μαθητές.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ζεύγος $\{x, y\}$ μαθητών, ώστε κάθε πρόβλημα να λύθηκε σωστά από τουλάχιστον ένα μαθητή απ' αυτούς.