ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Β΄ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΚΑΤΩ **ΤΩΝ 15 1/2 ΕΤΩΝ**

«Ευκλείδης»

Ημερομηνία: 10/02/2019 **Ώρα εξέτασης: 10:00-14:30**

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε **όλα** τα θέματα **αιτιολογώντας** πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού .
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

Πρόβλημα 1: Έστω p πρώτος αριθμός και β ακέραιος αριθμός τέτοιοι ώστε να ισχύουν:

- Ο αριθμός $2019+\beta$ είναι πολλαπλάσιο του p
- Ο αριθμός $2019^3+\beta^3$ είναι πολλαπλάσιο του p^2
- Ο αριθμός p^2 δεν διαιρεί τον $2019+\beta$.

Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $2019^3+\beta^3$ είναι πολλαπλάσιο του p^3

Πρόβλημα 2: Έστω θετικοί ακέραιοι μ, ν ώστε ο αριθμός $A=\mu^3+\nu^3-(\mu+\nu)^2$ να είναι επίσης θετικός ακέραιος.
(α) Να αποδείξετε ότι $A=(\mu+\nu)(\mu^2+\nu^2-\mu\nu-\mu-\nu)$
(β) Να βρείτε την ελάχιστη δυνατή τιμή της παράστασης A.

Πρόβλημα 3: Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\varDelta AB\Gamma$ με $\Gamma A=\Gamma B$ και $\angle A\Gamma B>90°$. Ονομάζουμε E το σημείο τομής της μεσοκαθέτου του $A\Gamma$ και της εσωτερικής διχοτόμου της γωνίας $\angle B$ του τριγώνου $\varDelta AB\Gamma$. Ο κύκλος με διάμετρο το AE τέμνει την ευθεία $A\Gamma$ στο σημείο Z. Αν η εφαπτομένη του κύκλου στο Z τέμνει την AB στο σημείο Θ, να αποδείξετε ότι $AZ=A\Theta$.

Πρόβλημα 4: Σε μια συνάντηση 100 ατόμων, κάθε άτομο αντιπαθεί ακριβώς ένα άλλο άτομο. (Η αντιπάθεια δεν είναι απαραίτητα αμοιβαία.)
(α) Να αποδείξετε ότι μπορούμε να επιλέξουμε 34 άτομα, ώστε καθένα από αυτά να μην αντιπαθεί κάποιο άλλο άτομο από αυτά.
(β) Να βρείτε παράδειγμα για το οποίο όπως και να επιλέξουμε 35 άτομα, κάποιο από αυτά θα αντιπαθεί κάποιο άλλο από αυτά.