



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ  
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2017

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 02/12/2017

Ώρα Εξέτασης: 09:30-12:30

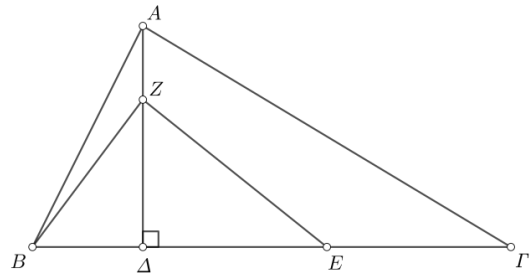
**ΟΔΗΓΙΕΣ:**

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

**ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ**

**Πρόβλημα 1**

Στο διπλανό σχήμα δίνεται τρίγωνο  $ABΓ$ . Το  $AD$  είναι ύψος του τριγώνου  $ABΓ$ , το  $E$  είναι το μέσο του  $ΔΓ$  και το  $Z$  είναι σημείο του  $AD$ , ώστε το μήκος του  $DZ$  να είναι διπλάσιο από το μήκος του  $AZ$ . Αν το εμβαδόν του τριγώνου  $ABZ$  είναι  $5 \text{ cm}^2$  και το εμβαδόν του τετραπλεύρου  $AΓEZ$  είναι  $30 \text{ cm}^2$ , να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου  $BEZ$ .



**Πρόβλημα 2**

Τρεις φίλοι, οι  $A, B$  και  $Γ$ , έχουν από μια υπολογιστική μηχανή και αρχίζουν να κάνουν πράξεις ταυτόχρονα. Ο  $A$  ξεκινά με τον αριθμό 100 και σε κάθε βήμα προσθέτει 3, ο  $B$  ξεκινά με τον αριθμό 2018 και σε κάθε βήμα αφαιρεί 4, ενώ ο  $Γ$  ξεκινά με τον αριθμό  $N$  και στο πρώτο βήμα προσθέτει 1, στο δεύτερο βήμα 2, στο τρίτο βήμα 3, κ.ο.κ. Αν ύστερα από  $n$  βήματα οι τρεις φίλοι καταλήγουν στο ίδιο αποτέλεσμα, να βρείτε τον αριθμό  $N$ .

**Πρόβλημα 3**

Ο Γιώργος χρωστά στον Γιάννη €132. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί ο Γιώργος να ξεπληρώσει το χρέος του, χρησιμοποιώντας κέρματα του €1 και χαρτονομίσματα των €5 και €10; *Σημείωση:* Σε κάθε τρόπο μας ενδιαφέρει το πλήθος των νομισμάτων και όχι η σειρά με την οποία επιλέγονται π.χ. ένας τρόπος είναι «32 κέρματα του €1 και 10 χαρτονομίσματα των €10».

**Πρόβλημα 4**

(α) Να δείξετε ότι για όλους τους πραγματικούς αριθμούς  $\alpha, \beta$  ισχύει ότι:

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$$

(β) Έστω  $x, y$  θετικοί πραγματικοί αριθμοί, για τους οποίους ισχύει ότι  $x + y = xy = y^2 - x^2$ .

i. Να δείξετε ότι  $x - \frac{1}{x} = 1$ .

ii. Να δείξετε ότι ο  $x^3 - \frac{1}{x^3}$  είναι ακέραιος αριθμός.