



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ  
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 2/12/17

Ωρα εξέτασης: 09:30 -12:30

**ΟΔΗΓΙΕΣ:**

1. Να λύσετε όλα τα θέματα .Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

**Πρόβλημα 1:** Δίνεται η συνάρτηση  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , με τις ιδιότητες:

- (i)  $f$  συνεχής στο  $[0, +\infty)$
- (ii)  $f$  παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$
- (iii)  $f(0) = 0$
- (iv) Η γραφική παράσταση της  $f$  στρέφει τα κοίλα πάνω στο  $(0, +\infty)$ .

Ορίζουμε τη συνάρτηση  $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , με  $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ .

Να αποδείξετε ότι  $\pi \cdot f(e) < e \cdot f(\pi)$ .

**Πρόβλημα 2:** Θεωρούμε ορθογώνιο  $AB\Gamma\Delta$  με διαστάσεις  $\alpha, \beta$  με  $\alpha \neq \beta$ . Από τις κορυφές  $A, \Gamma$  φέρουμε παράλληλες ευθείες  $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ , οι οποίες δεν έχουν άλλο κοινό σημείο με το ορθογώνιο και στη συνέχεια φέρουμε από τις κορυφές  $B, \Delta$  ευθείες  $(\varepsilon_3), (\varepsilon_4)$  κάθετες στις  $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ . Οι ευθείες  $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2), (\varepsilon_3), (\varepsilon_4)$  σχηματίζουν ένα νέο ορθογώνιο  $K\Lambda M N$ , του οποίου το εμβαδόν συμβολίζουμε με  $E$ . Να βρείτε τη μέγιστη τιμή  $E_{max}$  του  $E$ .

**Πρόβλημα 3:** Δίνεται το σύνολο  $A = \{2006 + |6^{2\mu} - 5^\nu|, \text{ με } \mu, \nu \in \{1, 2, 3, \dots\}\}$ .

Να βρείτε το ελάχιστο στοιχείο του συνόλου  $A$ .

**Πρόβλημα 4:** Δίνεται τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$ , με  $\angle B = \angle \Delta = 90^\circ$ . Οι διχοτόμοι των γωνιών  $\angle B A \Gamma$  και  $\angle B \Gamma A$  τέμνονται στο σημείο  $I$  και τέμνουν τις πλευρές  $B\Gamma$  και  $AB$  στα σημεία  $H$  και  $\theta$ , αντίστοιχα. Έστω  $O$  το περίκεντρο του τριγώνου  $\Delta B \theta H$ . Η ευθεία  $OI$  τέμνει τις ευθείες  $A\Gamma$  και  $AB$  στα σημεία  $\Xi$  και  $N$ , αντίστοιχα. Σημειώνουμε με  $Z$  το σημείο τομής των διαγωνίων  $A\Gamma, B\Delta$  του  $AB\Gamma\Delta$  και έστω ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου  $\Delta A \Delta Z$  τέμνει για δεύτερη φορά τις ευθείες  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  στα σημεία  $M$  και  $K$ , αντίστοιχα. Αν  $P$  το σημείο τομής των ευθειών  $MK$  και  $A\Gamma$ , να αποδείξετε ότι τα σημεία  $M, N, \Xi, P$  βρίσκονται πάνω στον ίδιο κύκλο.